

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГЛАЗОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. В.Г. Короленко

На правах рукописи

Саранин Владимир Александрович

**ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКА:
УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ, ЗАРЯДКА И КОНВЕКЦИЯ
ЖИДКИХ МАСС В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ**

01.02.05 - Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Глазов 1999

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

1.1. Постановка задачи. Основные уравнения и граничные условия

1.2. Устойчивость равновесия границы раздела в нормальном поле

1.2.1. Монотонная неустойчивость

1.2.2. Колебательная неустойчивость

1.3. Устойчивость равновесия границы раздела в касательном поле

1.3.1. Монотонная неустойчивость

1.3.2. Колебательная неустойчивость

1.4. О режимах возникновения статического рельефа на границе раздела жидкостей в электрическом поле

1.5. К теории кризиса кипения жидкостей в электрическом поле

2. ВЕТВЛЕНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСНЫХ ФОРМ КАПЕЛЬ И ПУЗЫРЕЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

2.1. О форме диэлектрических капель во внешнем электрическом поле

2.2. Ветвление равновесных форм наэлектризованных капель

2.3. Об усилении электрического поля атмосферы каплями воды

2.4. Ветвление равновесных форм наэлектризованных пузырей

2.5. К теории кавитационного механизма электрического пробоя

3. ЗАРЯДКА И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КАПЕЛЬ ВОДЫ В АТМОСФЕРЕ

3.1. Общие положения. Эксперимент. Постановка задачи

3.2. Зарядка капли при испарении в режиме пленочного кипения

3.3. Зарядка капли при испарении в конвективно-диффузионном режиме

3.4. Зарядка и левитация капель при нестационарном падении в атмосфере

3.5. Устойчивость и левитация капель

3.6. Некоторые эффекты электростатического взаимодействия капель

3.6.1. Вывод соотношений для расчета напряженностей поля и силы взаимодействия

3.6.2. Результаты расчетов напряженности поля и силы

3.6.3. Эффекты взаимодействия заряженных капель

4. ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ШАРОВОЙ МОЛНИИ

4.1. Модели шаровой молнии

4.2. Гидродинамика и теплообмен растущего горячего пузыря

4.3. К теории электротеплового взрыва, производимого молнией. Взрывной релаксационный процесс

5. КОНВЕКТИВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ

СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

5.1. Исходные положения электрогидродинамики и конвективной устойчивости

5.1.1. Обсуждение постановок задач

5.1.2. Механизмы проводимости и зарядообразования

5.1.3. Условия равновесия и принцип монотонности возмущений

5.1.4. Безындукционное приближение ЭГД

5.1.5. Вывод уравнений электроконвекции для омической модели проводимости

5.2. Устойчивость равновесия вертикального слоя слабопроводящей жидкости в электрическом поле

5.3. Устойчивость равновесия горизонтального слоя слабопроводящей жидкости в электрическом поле

6. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ И КОНВЕКЦИЯ ПРОВОДЯЩИХ ЖИДКОСТЕЙ С УЧЕТОМ ТЕРМОДИФфуЗИОННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ

6.1. Уравнения гидродинамики с учетом термодиффузионных электрических эффектов

6.2. Стационарное распределение поля и заряда в термоэлектрической ячейке

- 6.3. Влияние термоэлектрического поля на конвективную устойчивость равновесия жидкости
- 6.4. Влияние термоэлектрического поля на характер ветвления в режим стационарной конвекции и конвективный теплопоток
- 6.5. Влияние электрического поля двойного слоя на конвективную устойчивость равновесия жидкости
- 6.6. О движении жидкости, обусловленном взаимодействием термоэлектрического поля и двойного слоя
- 6.7. Термоэлектрогидродинамическое движение жидкости в плоском канале
- 6.8. Термомагнитогидродинамическое движение жидкости между коаксиальными цилиндрами

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ЛИТЕРАТУРА

ВВЕДЕНИЕ

Целью диссертационного исследования является выяснение характера и степени воздействия электрических зарядов и полей на различные гидродинамические процессы и процессы тепломассообмена, а также построение теорий, адекватно отражающих течение соответствующих процессов в природе и технике. При этом основное внимание уделено вопросам устойчивости механического равновесия жидких масс и границ раздела жидких сред в электрическом поле, а также электроконвекции жидкостей.

Диссертационное исследование можно считать **актуальным** в связи с тем, что задачи, рассмотренные в диссертации, имеют непосредственное отношение к таким проблемам, как физика процессов, происходящих в жидкостях под влиянием электрического поля [1, 2], управление (например интенсификация) гидродинамическими процессами и процессами тепломассообмена с помощью электрического поля (в том числе в условиях невесомости) [3-6], созданию новых технических устройств - ЭГД-насосов, преобразователей, сепараторов [7-10], электродиспергирование жидкостей [11-14], физика грозы (в том числе проблемы линейной и шаровой молний, проблема электризации гидрометеоров) [15-23], проблема электрического пробоя в жидкостях [24-29], поведение неклассических сред (жидкий гелий, жидкие кристаллы) в электрическом поле [30, 31].

Содержание диссертации состоит из шести глав.

Первая глава посвящена исследованию неустойчивости равновесия плоской горизонтальной границы раздела двух несмешивающихся жидкостей во внешнем вертикальном или горизонтальном электрическом поле. Впервые подобная задача была поставлена и решена Л. Тонксом [32] и Я. Френкелем [33]. Далее, в линейной по амплитуде постановке, теория ЭГД поверхностных волн и неустойчивостей была развита Дж. Мелчером и другими в работах [34-37] (см. также обзоры [38, 39]). Проблема механизмов возникновения

конечноамплитудного статического рельефа границы раздела жидкостей в электрическом поле в нелинейной постановке (в том числе и проблема отбора статических структур) рассматривалась в работах [30, 40, 41]. Обзор результатов аналогичных исследований для случая магнитных жидкостей в магнитном поле можно найти в [42]. В диссертации рассмотрены задачи об устойчивости равновесия плоской границы раздела слабопроводящих жидкостей, имеющих время релаксации заряда порядка характерного гидродинамического времени, в вертикальном и горизонтальном электрическом поле. Показано, что в этих случаях возможна колебательная неустойчивость. Рассчитаны и построены нейтральные кривые. Как для нормального, так и для касательного поля найдены границы областей параметров сред, внутри которых возможна либо монотонная, либо колебательная неустойчивость. Для случая перпендикулярного к границе электрического поля методом малого параметра решена задача об определении амплитуды статического рельефа границы раздела двух неидеальных жидкостей в электрическом поле, возникающего в результате потери устойчивости. Показано, что рельеф может возникать как мягко, так и жестко, причем найденное условие смены режимов неустойчивости универсально и применимо как к идеальным, так и к неидеальным (обладающим конечной проводимостью) диэлектрикам. Теория ЭГД неустойчивости равновесия границы раздела жидкостей применена к построению теории кризиса кипения диэлектриков в электрическом поле. Рассчитаны величины критических тепловых потоков и отрывных диаметров пузырей в зависимости от величины напряженности поля. Сравнение рассчитанных величин с экспериментальными и теоретическими данными других авторов [43-46] дает удовлетворительное согласие.

Вторая глава диссертации посвящена изучению равновесных форм наэлектризованных капель и их устойчивости. Под наэлектризованными каплями понимаются капли, поляризованные во внешнем поле и (или) электрически заряженные. Впервые задача об устойчивости сферической

формы проводящей заряженной капли была решена Рэлеем [47]. Другой классический предельный случай устойчивости эллипсоидальной (в виде вытянутого эллипсоида вращения) формы проводящей капли во внешнем электрическом поле был рассмотрен Г. Тейлором [48]. В дальнейшем подобные задачи рассматривались различными авторами в различных постановках. Обзоры соответствующих исследований можно найти, например, в работах [11, 13, 49]. Аналогичные исследования для случая магнитных жидкостей в магнитном поле освещены в [42]. **В диссертации** прямым численным интегрированием уравнения баланса давлений типа Юнга-Лапласа построено равновесное сечение диэлектрической капли во внешнем электрическом поле. Показано, что для капель, размер которых сравним с капиллярной постоянной жидкости, форма сечения во всех расчетных точках отличается от эллипсоидальной не более, чем на один процент и, тем самым, эллипсоидальное приближение является вполне приемлимым. Также численно и аналитически (используя эллипсоидальное приближение) определен порог устойчивости капли во внешнем поле. Оказалось, что в этом случае результаты отличаются менее чем на два процента. Методом минимизации потенциальной энергии капли показано, что существуют различные устойчивые (в смысле существования минимума энергии) эллипсоидальные формы наэлектризованных капель, между которыми могут осуществляться жесткие переходы с гистерезисом. Этот результат, изученный ранее теоретически и экспериментально для магнитных жидкостей [42], в диссертации обобщен и на случай проводящих заряженных капель во внешнем электрическом поле. Теория ветвления равновесных форм наэлектризованных капель применена к проблеме инициирования линейной молнии. Предложен единый критерий неустойчивости равновесия плоской поверхности в электрическом поле и поверхности наэлектризованных капель. Рассмотрены вопросы устойчивости равновесия и ветвления равновесных форм наэлектризованных пузырей. Несмотря на то, что заряженные пузырьки в электрическом поле в некоторых

случаях играют решающую роль в формировании электрического пробоя в жидкостях [1, 24, 25, 50], исследований в указанном направлении мало. В имеющихся же, пузыри не всегда обоснованно представляются несжимаемыми, что по сути означает капельный предел [51-53]. Методом минимизации энергии установлены возможные равновесные эллипсоидальные формы наэлектризованных пузырей с учетом их сжимаемости. Для заряженных пузырей показана возможность жестких переходов с гистерезисом между равновесными эллипсоидальными формами. Многомодовый метод Рэлея [47, 54] применен к анализу неустойчивости кавитационного заряженного пузыря, как возможного механизма формирования высоковольтного пробоя жидкости. Сравнение полученных результатов с экспериментальными результатами работы [55] демонстрирует удовлетворительное согласие.

Третья глава диссертации посвящена исследованию механизмов зарядки и взаимодействия заряженных капель в атмосфере. Как известно (см., например, [15-19]), в настоящее время не существует законченной общепризнанной теории грозы. Тогда как заряженные капли воды это основополагающие структурные элементы формирования грозы, поэтому внимание исследователей к ним велико. В частности, различными авторами предложены и исследованы различные механизмы зарядки капель, изложение их можно найти в [14-19]. В диссертации предложен и исследован новый механизм зарядки капель. Суть его сводится к тому, что при неоднородном испарении капли, поляризованной внешним электрическим полем, ионы одного какого-то знака испаряются более интенсивно. В итоге капля приобретает избыточный заряд другого знака. В отличие от известных механизмов зарядки, зарядка капель в результате предлагаемого механизма может происходить в абсолютно непроводящей среде. Предложен и выполнен качественный модельный эксперимент, демонстрирующий возможность зарядки и левитации капли в условиях неоднородного испарения (пленочного кипения). Получено и проинтегрировано уравнение кинетики зарядки капли в условиях пленочного

кипения и в условиях конвективно-диффузионного испарения при различных числах Рейнольдса. Предложено феноменологическое уравнение, описывающее кинетику зарядки капли при падении ее в воздухе. Произведено численное моделирование процесса падения и зарядки капли в атмосфере. Показана возможность левитации капель и дано объяснение зеркальному эффекту Симпсона, обнаруженному экспериментально и описанному, например, в [19]. Решена задача о взаимодействии двух заряженных сферических капель, падающих в атмосфере. Рассчитаны силы, энергии взаимодействия и напряженности поля. Установлена возможность такого нетрадиционного эффекта как слияние одноименно заряженных капель с последующей неустойчивостью образовавшейся капли по Рэлею.

В четвертой главе диссертации рассмотрены некоторые аспекты проблемы шаровой молнии. Проблема шаровой молнии (ШМ) была объектом исследования для многих ученых, в том числе таких именитых как Н. Тесла, П.Л. Капица, однако эта проблема существует и в настоящее время. Обсуждение моделей ШМ, ее наблюдательные свойства и их статистическую обработку можно найти в книгах и обзорах [20-23, 56-58]. В диссертации предложена и проанализирована пузырьковая модель шаровой молнии, согласно которой ШМ это электрически заряженный расплавленный или отвердевший пузырь из металла или силиката вокруг которого происходит реакция горения. Дано объяснение тому, как может образоваться такой объект, сделаны оценки параметров ШМ. Численно решена задача о росте и теплообмене горячего пузыря, которым представляется ШМ. Описаны и проанализированы два случая натуральных наблюдений автора разрушений деревянных опор линий электропередач молнией (предположительно шаровой). Представлены фотографии разрушений. На основе результатов наблюдений предложена теория электротеплового взрыва, производимого шаровой или линейной молнией. Произведенные расчеты позволили оценить энергию и

мощность взрыва (ШМ). Введено понятие и сформулированы необходимые условия взрывного релаксационного эффекта в жидкости.

Пятая глава посвящена проблеме конвективной устойчивости равновесия слабопроводящих жидкостей в электрическом поле. В более общей проблеме электроконвективной устойчивости и электроконвекции можно выделить два направления. Одно из них связано с исследованием электроконвективной устойчивости и конвекции изотермической жидкости во внешнем электрическом поле. В этом случае кулоновские силы возникают в результате образования объемного заряда в жидкости. В ряде работ считается, что объемный заряд в жидкости возникает из-за сильной неоднородности поля вблизи некоторых участков электродов [59-61]. Однако эта гипотеза объемного зарядообразования не получила должного развития. Более перспективной оказалась гипотеза объемного зарядообразования, согласно которой заряд в жидкости образуется в результате инъекции с одного из электродов [2, 10, 62-67], либо в результате окислительно-восстановительных реакций на электродах [2, 68, 69]. Второе направление связано с изучением электроконвективной неустойчивости и конвекции неоднородно нагретой слабопроводящей жидкости [3, 70-76]. Соответствующие экспериментальные исследования можно найти в работах [3, 73, 74, 77, 78]. **В диссертации** рассмотрена конвективная устойчивость равновесия неоднородно нагретой слабопроводящей жидкости во внешнем постоянном электрическом поле. При этом образование объемного заряда в жидкости связывается с неоднородностью тока, обусловленной зависимостью омической электропроводности жидкости от температуры. В рамках такой постановки задачи сохраняется возможность проявления других механизмов зарядообразования и формирования электрического поля, поэтому в начале шестой главы подробно обсуждаются смежные постановки задач и механизмы проводимости, образования заряда и поля. Определены рамки применимости омической модели проводимости. Обсужден принцип смены устойчивости. Сформулировано и обосновано

безындукционное приближение ЭГД. На основе полученных уравнений решены задачи о конвективной устойчивости равновесия плоских вертикального и горизонтального слоев неоднородно нагретой жидкости в электрическом поле. Построены нейтральные кривые, определены частоты нейтральных колебаний. Сравнение полученных результатов с теоретическими и экспериментальными результатами других авторов демонстрирует удовлетворительное согласие.

В **шестой главе** рассмотрены некоторые вопросы конвективной устойчивости и конвекции проводящих жидкостей с учетом внутренних электрических полей: термоэлектрического поля и диффузионного электрического поля двойного слоя. Задачи об электроконвекции с учетом термоэлектрических эффектов рассматривались в [79-82]. Влияние электрического поля двойного слоя на конвективную устойчивость равновесия жидкости рассматривалось в работе [83]. В **диссертации** дано обоснование уравнениям электрогидродинамики с учетом диффузионных и термодиффузионных эффектов, приводящих к возникновению внутренних электрических полей и объемных зарядов. Рассмотрено влияние термоэлектрического поля на конвективную устойчивость равновесия жидкости и возникновение конвекции в линейной и нелинейной по амплитуде возмущений постановке. В частности показано, что термоэлектрическое поле понижает порог устойчивости, не изменяет мягкий характер ветвления в стационарный режим конвекции, но может увеличить или уменьшить конвективный теплопоток через слой по сравнению с чисто бенаровским. В более общей, чем в [83], постановке исследовано влияние электрического поля двойного слоя на конвективную устойчивость равновесия жидкости, показана, в частности, возможность колебательной неустойчивости. Решены задачи о конвективном движении жидкости, возникающем под действием исключительно электрических пондеромоторных сил в условиях невесомости.

Рассмотрена также смежная задача о термомагнитогидродинамическом движении жидкости между коаксиальными цилиндрами.

В диссертации получены следующие **новые результаты**, которые автором **выносятся на защиту**.

Впервые показана возможность колебательной неустойчивости равновесия границы раздела жидкостей в нормальном электрическом поле. Определены параметры жидкостей, для которых колебательная неустойчивость возможна. Рассчитаны нейтральные кривые и частоты нейтральных колебаний. Также уточнены параметры жидкостей, для которых возможна колебательная неустойчивость в касательном поле. Построены единые диаграммы областей параметров сред, внутри которых в различно ориентированных полях возможен монотонный или колебательный тип неустойчивости. Методом малого параметра в нелинейной по амплитуде возмущений постановке задачи найден единый для проводящих и непроводящих сред критерий смены мягкого и жесткого режимов неустойчивости границы раздела жидкостей в электрическом поле. Предложена ЭГД теория кризиса кипения жидкостей на проволочке с учетом кривизны теплотдающей поверхности.

Проведено исследование устойчивости эллипсоидальных форм капель с учетом стрикционных сил. Показано, что последние не влияют на порог устойчивости, а лишь переопределяют давление внутри капли. Впервые для проводящих заряженных капель, находящихся во внешнем электрическом поле, установлено существование различных ветвей равновесных эллипсоидальных форм, между которыми возможны жесткие переходы с гистерезисом. Рассчитаны коэффициенты усиления внешнего поля эллипсоидальными каплями. Впервые поставлены и решены задачи о ветвлении и устойчивости равновесных эллипсоидальных форм наэлектризованных пузырей с учетом их сжимаемости.

Предложен новый механизм зарядки проводящей капли за счет ее неоднородного испарения во внешнем электрическом поле в непроводящей

среде. Получено уравнение кинетики зарядки. На его основе решены задачи об определении времени зарядки и максимального заряда капли в условиях пленочного кипения и испарения в конвективно-диффузионном режиме. Предложено феноменологическое уравнение кинетики зарядки капли воды в атмосфере. Теоретически и экспериментально показана возможность левитации капель воды в атмосфере. Впервые дано объяснение зеркальному эффекту Симпсона.

Получены асимптотические (в том числе автомодельные) соотношения для сил и энергий взаимодействия двух близко расположенных заряженных сферических частиц (капель). Впервые установлен инвариант взаимодействия одноименно заряженных частиц разных радиусов: их отталкивание на любых расстояниях, если заряды частиц относятся как квадраты их радиусов, при других условиях на малых расстояниях имеет место притяжение таких частиц. Показана возможность рэлеевской неустойчивости капли, образовавшейся в результате коагуляции двух меньших одноименно заряженных капель.

Предложена и проанализирована новая модель шаровой молнии (ШМ), согласно которой ШМ представляет собой электрически заряженный расплавленный (затвердевший) пузырь из металла или силиката, окруженный зоной горения. Впервые поставлена и численно решена задача о теплообмене горячего, растущего за счет электрического заряда, пузыря. Установлено, что для вырастания до размеров наблюдаемой ШМ на поверхности пузыря должна возникнуть реакция горения. Впервые опубликованы уникальные фотографии разрушений деревянных опор двух линий электропередач молнией (предположительно шаровой). На основе этих наблюдений предложена теория электротеплового взрыва предметов, производимого молнией. Произведенные на основе теории расчеты позволили оценить энергию и мощность ШМ. Впервые введено и обосновано понятие взрывного релаксационного процесса.

Дано обоснование возможности использования омической модели проводимости при рассмотрении задач ЭГД конвекции. Показано, что принцип

монотонности возмущений выполняется в случае цилиндрической и сферической геометриях электродов и не выполняется для плоской. Впервые дано обоснование безындукционному ЭГД приближению. Получено точное решение задачи о конвективной устойчивости неоднородного нагретого вертикального слоя слабопроводящей жидкости при различных ориентациях электрического поля. Впервые произведено прямое численное интегрирование методом Рунге-Кутты-Мерсона системы уравнений ЭГД конвективной устойчивости для случая горизонтального слоя жидкости.

Дано обоснование возможности постановки задач о конвективной устойчивости равновесия неоднородной жидкости с учетом термоэлектрических эффектов. Впервые в наиболее полной постановке решена задача о влиянии термоэлектрического поля на конвективную устойчивость равновесия жидкости. Впервые поставлена и решена задача о характере ветвления в режим стационарной конвекции с учетом термоэлектрического поля. Впервые в наиболее полной постановке решена задача о влиянии электрического поля двойного слоя на конвективную устойчивость равновесия. Показана возможность колебательной неустойчивости. Впервые поставлены и решены задачи о конвективных движениях, обусловленных термоэлектрическим полем, полем электрического двойного слоя, магнитным полем и термоэлектрическим током.

Достоверность и надежность результатов подтверждается во-первых, тем, что практически в каждом разделе всех глав имеется сравнение теоретических расчетов с экспериментальными данными, полученными самим автором или другими авторами, которое демонстрирует качественное и количественное согласие; во-вторых, теоретические расчеты, выполненные автором в более общей постановке, допускают предельные переходы к хорошо известным результатам других авторов.

Научная и практическая значимость диссертационной работы заключается в следующем. Получен ряд новых результатов, позволяющих

пополнить научные представления в области электрогидродинамики, теории устойчивости, метеорологии, теории электрического пробоя, предложены и исследованы новый механизм зарядки капель, новая модель шаровой молнии. Результаты, полученные в диссертации, использовались при планировании и прогнозировании технологических экспериментов в космосе, при постановке теоретических и экспериментальных исследований в Пермском государственном университете, Пермском педагогическом университете, Институте механики сплошных сред РАН (г. Пермь), Институте прикладной физики АН Молдовы (г. Кишинев), при разработке спецкурсов в Глазовском пединституте.

Апробация результатов диссертационной работы состоялась при обсуждении докладов на: 8-ом Рижском совещании по применению магнитной гидродинамики в металлургии (Рига, 1975); 4-ом Всесоюзном совещании по электрической обработке материалов (Кишинев, 1975); 4-ом Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Киев, 1976); Всесоюзном семинаре по гидромеханике и тепломассообмену в невесомости (Москва, 1979); Уральской зональной конференции молодых ученых и специалистов (Пермь, 1980); 5-ом Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Алма-Ата, 1981); 2-ом Всесоюзном семинаре по гидромеханике и тепломассообмену в невесомости (Пермь, 1981); XVI конференции молодых исследователей ИТФ СО АН СССР (Новосибирск, 1983); 3-ем Всесоюзном семинаре по гидромеханике и тепломассообмену в невесомости (Черноголовка, 1984); 5-ом Всесоюзном совещании по электрическим методам обработки материалов (Кишинев, 1985); 3-ем Всесоюзном семинаре по проблеме шаровой молнии (Москва, 1989); Всесоюзных конференциях «Долгоживущие плазменные образования и малоизученные формы естественных электрических разрядов в атмосфере» (Ярославль, 1990, 1992); International Workshop on G-Jitter (Potsdam, New York, USA, 1993); 10-ой Зимней школе по механике сплошных сред (Пермь, 1995); 11-ой Международной школе по механике

сплошных сред (Пермь, 1997); 2-ой Российской национальной конференции по теплообмену (Москва, 1998); 12-ой Зимней школе по механике сплошных сред (Пермь, 1999).

По теме диссертации автором **опубликовано 33 работы** [6, 151-182].

Основные результаты первой главы опубликованы в работах [6, 151, 156, 170, 173, 179, 182], второй главы - в [164, 165, 172, 175, 181], третьей главы - в [171, 172, 174, 176, 178, 180], четвертой главы - в [162, 163, 167, 168, 169, 177], пятой главы - в [6, 152, 153, 155, 159], шестой главы - в [154, 157, 158, 160, 161, 166].

Большинство опубликованных работ выполнены автором самостоятельно. В соавторстве выполнено 7 работ. Из них, в работе [6] автору принадлежит участие в расчетах и обсуждении результатов. В [151] автору принадлежат конкретные расчеты и участие в обсуждении результатов. В [156] автор теоретически исследовал конвективную устойчивость равновесия слабопроводящих жидкостей в электрическом поле и устойчивость границы раздела жидкостей в постоянном поле (включая кризис кипения). В [165] автор выполнил расчеты формы деформированного пузыря в электрическом поле. В [170] автору принадлежит участие в расчетах и обсуждении результатов. В работах [173, 175] вклад автора составляет постановка задач, участие в расчетах и обсуждении результатов.

В диссертации используется Международная система единиц СИ. Обозначения некоторых физических величин сохраняют свое значение лишь в пределах одной главы.

Автор всегда с благодарностью будет вспоминать своих Учителей Григория Зиновьевича Гершуни и Ефима Михайловича Жуховицкого. Автор особо признателен за сотрудничество Владимиру Абрамовичу Брискману.

1. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

1.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим две несмешивающиеся жидкости с различными механическими и электрическими свойствами, находящиеся во внешнем постоянном и однородном электрическом поле. Будем считать, что каждая из них однородна по своему составу и температуре, причем последняя одинакова для обеих сред. Кроме того, предположим, что жидкости линейно поляризуются и проводят электрический ток по закону Ома. Ввиду этого будем пренебрегать объемными электрическими силами и учитывать только поверхностные силы. Электропроводности жидкостей σ будем считать малыми в том смысле, что можно пренебречь магнитогидродинамическими эффектами и джоулевым разогревом, то есть будем считать выполненным основное приближение электрогидродинамики [84] (h - характерный размер области)

$$\frac{\mu_0 \mu \sigma^2 h^2}{\varepsilon_0 \varepsilon} \ll 1.$$

ε_0, μ_0 - электродинамические постоянные (здесь и далее будет использоваться Международная система единиц СИ). Фактически это есть условие малости времени магнитной диффузии по сравнению со временем релаксации электрического заряда. Нетрудно проверить, что при электропроводности жидкости $\sigma \ll 1 \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$ и $\mu \varepsilon \approx 1$ оно выполняется для характерных размеров $h < 10 \text{ см}$. Можно также выделить область электрогидродинамики слабопроводящих жидкостей, в которых время релаксации заряда одного порядка с характерным гидродинамическим временем $\tau \sim h / v_*$. Полагая, например: $v_* \sim 1 \text{ см/с}$, $h \sim 1 \text{ см}$ получим для σ оценку: $\sigma \sim 10^{-12} \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$.

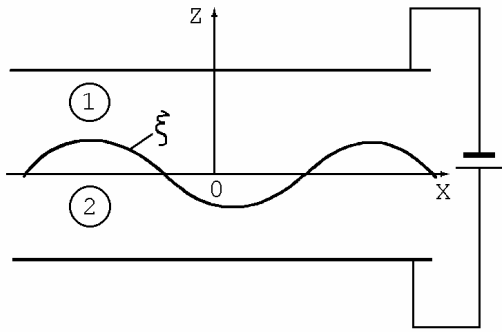


Рис. 1.1

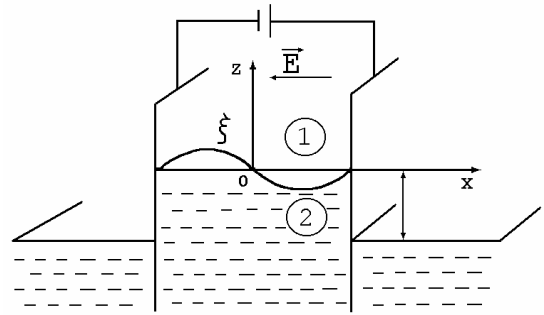


Рис. 1.2

Вид теоретических моделей для исследования устойчивости равновесия границы раздела жидкостей в электрическом поле

В том случае, если жидкости заполняют пространство между пластинами плоского конденсатора, ориентированного горизонтально (рис.1.1), либо вертикально (рис.1.2) существует их механическое равновесие. При этом граница раздела жидкостей плоская и имеет уравнение $z = 0$. Избыточное давление со стороны одной из сред, создаваемое электрическим полем, компенсируется гидростатическим. Для открытой системы (рис.1.2) это приводит, например, к поднятию (опусканию) жидкости на высоту

$$h = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)E_0^2}{2g(\gamma_2 - \gamma_1)}.$$

Индексами "1" и "2" снабдим величины, относящиеся соответственно к верхней и нижней жидкости, $\gamma_{1,2}$ – плотности сред. При этом равновесный поверхностный заряд равен

$$Q_0 = \varepsilon_0(\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n}) = 0.$$

А величина напряженности одинакова в обеих средах и определяется либо плотностью тока и удельными электропроводностями сред $\sigma_{1,2}$ (проводящие среды)

$$E_0 = \frac{j_0(\sigma_1 + \sigma_2)}{\sigma_1 \sigma_2},$$

либо плотностью заряда Q_s на обкладках и диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_{1,2}$ (непроводящие среды)

$$E_0 = \frac{Q_s(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2}.$$

В случае плоского горизонтального конденсатора (рис.1.1) равновесное распределение поля и поверхностного заряда получается следующим. Для непроводящих сред:

$$E_{10} = \frac{\delta\varphi}{h_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} h_2}, \quad E_{20} = \frac{\delta\varphi}{h_1 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + h_2}. \quad (1.1)$$

Для проводящих сред:

$$E_{10} = \frac{\delta\varphi}{h_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} h_2}, \quad E_{20} = \frac{\delta\varphi}{h_1 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + h_2}, \quad Q_0 = \frac{\varepsilon_0 \delta\varphi}{h_1 \sigma_2 + h_2 \sigma_1} (\varepsilon_1 \sigma_2 - \varepsilon_2 \sigma_1). \quad (1.2)$$

Здесь $\delta\varphi$ - разность потенциалов между обкладками, $h_{1,2}$ - толщины слоев.

Пондеромоторные силы, действующие на поверхность, могут привести к искривлению ее, то есть к потере устойчивости равновесия.

В сделанных предположениях линеаризованная система уравнений для возмущений в объеме, возникающих в результате малого искривления поверхности, выглядит так

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = -\nabla p'_i / \gamma_i + v_i \Delta \vec{v}_i, \quad \text{div} \vec{v}_i = 0, \quad (1.3)$$

$$\text{div} \vec{e}_i = 0, \quad \text{rot} \vec{e}_i = 0, \quad p'_i = p_i + \gamma_i g z, \quad i = 1, 2.$$

Будем считать, что возмущение поверхности имеет форму

$$z = \xi(x, y, t) = \xi_0 \exp\{\lambda t - ik_x x - ik_y y\}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Для простоты предположим, что толщина каждого слоя жидкости гораздо больше характерной длины волны $k_* h_i \gg 1$. Тогда для возмущений скорости, электрического поля и давления получим следующие решения, затухающие по мере удаления от поверхности:

$$\begin{aligned}
v_{z1,2} &= \left(A_{1,2} e^{\mp kz} + B_{1,2} e^{\mp m_{1,2} kz} \right) \exp\{\lambda t - ik_x x - ik_y y\}, \\
v_{x1,2} &= \pm \left(\frac{ik_y}{k} A_{1,2} e^{\mp kz} + \frac{ik}{k_y} m_{1,2} B_{1,2} e^{\mp m_{1,2} kz} + \frac{k_x^2}{ikk_y} F_{1,2} e^{\mp m_{1,2} kz} \right) \exp\{\lambda t - ik_x x - ik_y y\} \\
e_{z1,2} &= -C_{1,2} k e^{\mp kz} \exp\{\lambda t - ik_x x - ik_y y\}, \\
e_{x1,2} &= \mp ik_x C_{1,2} e^{\mp kz} \exp\{\lambda t - ik_x x - ik_y y\}, \\
e_{y1,2} &= \mp ik_y C_{1,2} e^{\mp kz} \exp\{\lambda t - ik_x x - ik_y y\}, \\
v_{y1,2} &= \pm \frac{ik_x}{k} \left(A_{1,2} e^{\mp kz} + F_{1,2} e^{\mp m_{1,2} kz} \right) \exp\{\lambda t - ik_x x - ik_y y\}, \\
p_{1,2} &= \pm \frac{\lambda \gamma_{1,2} A_{1,2}}{k} e^{\mp kz} \exp\{\lambda t - ik_x x - ik_y y\}, \\
m_{1,2} &= \left(1 + \frac{\lambda}{v_{1,2} k^2} \right)^{1/2}, \quad k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

В решения входят постоянные интегрирования $A_{1,2}$, $B_{1,2}$, $C_{1,2}$, $F_{1,2}$. Для их определения необходимо записать граничные условия на поверхности $z = \xi(x, y, t)$. Эти условия получаются из требований непрерывности на границе скорости, тангенциальной компоненты поля, полного тензора напряжений (включающего вязкие и максвелловские напряжения) и нормальной компоненты полного тока. Граничные условия можно записать в форме

$$\begin{aligned}
[\vec{v}] &= 0, \quad \vec{n} \times [\vec{E}] = 0, \quad n_i [T_{ik}] + n_k \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0, \\
\vec{n} [\sigma \vec{E}] + \operatorname{div}_s (Q \vec{v} + \sigma_s \vec{E}_\tau) + \frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{n} [\rho \vec{v}] &= 0, \\
Q &= \varepsilon_0 \vec{n} [\varepsilon \vec{E}], \quad v_z = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{v} \nabla \xi,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$T_{ik} = -\delta_{ik} (p' - g\gamma z) - \frac{\varepsilon_0 \delta_{ik}}{2} \varepsilon E^2 + \varepsilon_0 \varepsilon E_i E_k + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right).$$

Здесь α - коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела,

$$\vec{n}, n_{i,k} = \left\{ -\frac{\xi'_x}{\sqrt{1 + \xi'^2_x + \xi'^2_y}}, -\frac{\xi'_y}{\sqrt{1 + \xi'^2_x + \xi'^2_y}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \xi'^2_x + \xi'^2_y}} \right\},$$

$$(i, k=1, 2),$$

единичный вектор нормали к поверхности $\xi(x, y, t)$, квадратными скобками обозначается скачок величин при переходе через поверхность

$$[X] = (X_1 - X_2)_{z=\xi},$$

$R_{1,2}$ - радиусы кривизны, η и ν динамическая и кинематическая вязкости соответственно. Посредством div_s обозначен оператор поверхностной дивергенции. σ_s - специфическая поверхностная электропроводность.

Отметим, что закон сохранения поверхностного заряда в (1.5) может быть получен обычным способом [85], т.е. интегрированием закона сохранения объемного заряда по малому объему, включающему в себя элемент заряженной поверхности. Заметим также, что поверхностная электропроводность должна быть связана с существованием достаточно большого скачка обычной электропроводности на границе раздела. Это возможно, например, при образовании на поверхности адсорбционного слоя ионов одного знака, либо при аномально большой подвижности частиц на поверхности [86]. В том случае, когда кинетические свойства частиц при переходе через поверхность меняются плавно (ниже это будет предполагаться), можно считать $\sigma_s = 0$.

1.2. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В НОРМАЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Рассмотрим две несмешивающиеся жидкости, заполняющие пространство между пластинами плоского конденсатора (рис.1.1). В равновесии поле однородно и постоянно в каждой из сред

$$\vec{E}_{10,20} = \{0, 0, E_{10,20}\}.$$

Допустим, что поверхность в результате возмущения слабо искривляется, так что ее уравнение становится таким $z(x, t) = \xi(x, t) = \xi_0 \exp\{\lambda t - ikx\}$. Возникающие малые возмущения скорости, давления, поля, заряда удовлетворяют уравнениям (1.3), (1.4) и граничным условиям (1.5). Линеаризуем систему граничных условий (1.5) по малым возмущениям и запишем ее в форме

$$[v_x] = [v_z] = 0, \quad (1.6)$$

$$[e_x - ik\xi E_0] = 0, \quad (1.7)$$

$$\lambda \varepsilon_0 [\varepsilon e_z] + [\sigma e_z] + Q_0 \left(\frac{\partial v_{x1}}{\partial x} \right) = 0, \quad (1.8)$$

$$Q_0 (e_{x1} - ik\xi E_{10}) + \left[\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] = 0, \quad (1.9)$$

$$[p] - g[\gamma]\xi + \alpha k^2 \xi - \left[2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \varepsilon_0 [\varepsilon e_z E_0] = 0, \quad (1.10)$$

$$Q_0 = \varepsilon_0 [\varepsilon E_0], \quad (1.11)$$

$$v_{1z} = v_{2z} = \lambda \xi. \quad (1.12)$$

1.2.1. Монотонная неустойчивость

Хорошо известны результаты исследования устойчивости равновесия поверхности в случае идеально проводящей поверхности и в случае двух идеальных диэлектриков [30, 32-36]. Под идеально проводящей поверхностью понимается поверхность, на которой обращается в нуль касательная компонента поля. (Очевидно, для этого достаточно, чтобы одна из сред была хорошим проводником). Первый из этих случаев реализуется, например, для границы раздела воздух-вода, а второй можно реализовать в высокочастотном поле, таком, что частота изменения этого поля много больше обратного времени релаксации заряда (в этом случае E_{10} и E_{20} - эффективные значения напряженностей, см. также [87, 88]). Эти предельные случаи характерны тем, что на поверхности отсутствуют сдвиговые электрические силы.

Действительно, в случае идеально проводящей поверхности имеем граничные условия отсутствия касательной компоненты поля на поверхности

$$e_{x1} - ik\xi E_{10} = e_{x2} - ik\xi E_{20} = 0, \quad (1.13)$$

а в случае непроводящих жидкостей – условие отсутствия поверхностного заряда и условие непрерывности касательной компоненты поля

$$Q = \varepsilon_0 [\varepsilon E_n] = 0, \quad [E_\tau] = 0. \quad (1.14)$$

И в том и в другом случае левая часть уравнения (1.9), представляющая собой электрические силы, касательные к поверхности, обращается в нуль. При таких условиях силы, действующие по нормали к поверхности, являются либо кулоновскими (идеально проводящая поверхность), либо поляризационными (идеальные диэлектрики) и всегда прямо пропорциональны смещению участков поверхности. Это приводит к тому, что в рассматриваемых предельных случаях поверхность неустойчива только по отношению к возмущениям, монотонно развивающимся во времени. Кроме того, влияние вязкости на критическое значение напряженности поля в такого типа монотонной неустойчивости (иногда используется термин "статическая") обычно незначительно, поэтому вышеупомянутые предельные случаи рассматриваются в приближении невязкой жидкости.

Для идеально проводящей поверхности, пренебрегая вязкостью, используя решение (1.4) и граничные условия (1.6), (1.12), (1.13), нетрудно получить дисперсионное соотношение для ЭГД гравитационно-капиллярных волн

$$\lambda^2 = - \left(\frac{g(\gamma_{2Б} - \gamma_1)k}{\gamma_2 + \gamma_1} + \frac{\alpha k^3}{\gamma_2 + \gamma_1} - \frac{\varepsilon_0 \{ \varepsilon E_0^2 \} k^2}{\gamma_1 + \gamma_2} \right). \quad (1.15)$$

Фигурные скобки здесь и далее означают

$$\{X\} = (X_1 + X_2)_{z=0}.$$

Напряженность поля, при которой наступает неустойчивость по отношению к монотонным возмущениям (то есть $\lambda = 0$) с волновым числом k , определяется из соотношения

$$\{\varepsilon E_0^2\} = \frac{g(\gamma_2 - \gamma_1)}{\varepsilon_0 k} + \frac{\alpha k}{\varepsilon_0}.$$

Наиболее опасными, в смысле минимума напряженности, являются возмущения с релей-тейлоровской длиной волны, которая определится следующим образом:

$$l_m = 2\pi \left(\frac{\alpha}{g(\gamma_2 - \gamma_1)} \right)^{1/2} = \pi \sqrt{2} a_s, \quad a_s = \sqrt{\frac{2\alpha}{g(\gamma_2 - \gamma_1)}} \quad (1.16)$$

где a_s - капиллярная постоянная. Соответствующее волновое число и критическое поле определяются так

$$\varepsilon_1 E_{10}^2 + \varepsilon_2 E_{20}^2 = 2\alpha k_m / \varepsilon_0, \quad k_m = \left(\frac{g(\gamma_2 - \gamma_1)}{\alpha} \right)^{1/2}, \quad E_{20} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} E_{10}. \quad (1.17)$$

Введем безразмерный параметр поля, ответственный за возникновение данного типа неустойчивостей, определив его следующим образом:

$$N^2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{10}^2 l_m}{4\alpha}. \quad (1.18)$$

Тогда условие неустойчивости (1.17) запишется в виде

$$N^2 = \frac{\pi}{(1 + \varepsilon_2 \sigma_1^2 / \varepsilon_1 \sigma_2^2)}. \quad (1.19)$$

Предположим теперь, что обе жидкости являются идеальными диэлектриками и на поверхности нет свободного заряда. Тогда, используя (1.4), (1.6)-(1.12) и (1.14), получим следующее дисперсионное соотношение:

$$\lambda^2 = - \left(\frac{g(\gamma_2 - \gamma_1)k}{\gamma_2 + \gamma_1} + \frac{\alpha k^3}{\gamma_2 + \gamma_1} - \frac{k^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \varepsilon_0 E_{10} E_{20}}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\gamma_1 + \gamma_2)} \right). \quad (1.20)$$

Как и в случае идеально проводящей поверхности, наиболее опасными являются релей-тейлоровские возмущения, а критическая напряженность определяется из соотношения

$$E_{10} E_{20} = 2\alpha k_m \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}, \quad E_{20} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{10}. \quad (1.21)$$

Переходя к N^2 , получим

$$N^2 = \frac{\pi\varepsilon(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^2}, \quad \varepsilon = \varepsilon_2 / \varepsilon_1. \quad (1.22)$$

В случае, когда нижняя среда идеально поляризующаяся (проводящая) $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$ ($E_2 \rightarrow 0$) оба условия неустойчивости (1.19) и (1.22) переходят в условие Тонкса-Френкеля

$$N^2 = \pi. \quad (1.23)$$

В заключение приведем дисперсионные соотношения для ЭГД-волн на поверхности раздела жидкостей конечной глубины h_1 и h_2 , которые можно получить вместо (1.15) и (1.20), используя уравнения (1.3) и граничные условия (1.5) (см., например, [89])

$$\lambda^2 = -\frac{gk(\gamma_2 - \gamma_1) + \alpha k^3 - \varepsilon_0 k^2 \{\varepsilon E_0^2 \operatorname{cth} kh\}}{\{\gamma \operatorname{cth} kh\}},$$

$$\lambda^2 = -\frac{gk(\gamma_2 - \gamma_1) + \alpha k^3 - \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 E_{10} E_{20} k^2 \{\varepsilon \operatorname{th} kh\}^{-1}}{\{\gamma \operatorname{cth} kh\}}.$$

1.2.2. Колебательная неустойчивость

Как показано выше, для предельных случаев бесконечно малого времени релаксации заряда колебательные моды затухают и по отношению к ним равновесие плоской поверхности устойчиво. Однако если учесть, что время релаксации заряда конечно, то возмущения поля зависят уже не только от величины смещения, но и от скорости смещения. Это приводит к тому, что электрическое поле выступает в роли добавочной "вязкости". Причем эта "вязкость" может оказаться и отрицательной, так что поле будет способствовать нарастанию колебаний.

Перейдем к рассмотрению колебательной неустойчивости [151, 173].

Допустим, что жидкости имеют различные проводимости, диэлектрические проницаемости и плотности, но одинаковые кинематические вязкости. Используя решение (1.4) и граничные условия (1.6)-(1.12), нетрудно для этого случая получить полное дисперсионное соотношение $\lambda(k)$. Приведем его в

безразмерной форме. В качестве единицы длины выберем длину волны релей-тейлоровских возмущений

$$[l] = \frac{2\pi}{k_m} = l_m. \quad (1.24)$$

В качестве единицы времени выберем обратную частоту гравитационно-капиллярных волн

$$[t] = \Omega_m^{-1} = \left(\frac{gk_m}{\gamma_1 + \gamma_2} + \frac{\alpha k_m^3}{\gamma_1 + \gamma_2} \right)^{-1/2}. \quad (1.25)$$

Единица напряженности поля - E_{10} . Тогда получим дисперсионное соотношение в форме

$$\begin{aligned} & \left(\lambda^2 Z + \Omega^2 Z + B_1 \Phi Z k^2 (n_1 - 1) + \lambda^2 \right) \cdot \left(\lambda + \Theta B_1 Z k^2 \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \right) - \\ & - \left(B_1 k^2 \Psi Z \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1 - n_3}{1 + n_3} \right) + 2M k^2 \lambda Z \left(\frac{1 - n_3}{1 + n_3} \right) - \lambda^2 \left(\frac{1 - n_3}{1 + n_3} \right)^2 \right) \times \\ & \times \left(-\lambda + 2M k^2 Z + B_1 k^2 \Theta \left(\frac{n_1 + n_2}{n_2} \right) \left(\frac{1 + n_3}{1 - n_3} \right) Z \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} Z &= \left(1 + \frac{\lambda}{M k^2} \right)^{1/2} - 1, \quad M = \frac{\nu k_m^2}{\Omega_m}, \quad n_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad n_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad n_3 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \\ B_1 &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{10}^2 k_m^2 n_2}{(\gamma_1 + \gamma_2) \Omega_m^2 n_1^2}, \quad \beta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \Omega_m}, \quad \Phi = \frac{(1 - n_1) \lambda + \beta_1 - \beta_2 n_1}{(1 + n_2)(\beta + \lambda)}, \\ \Psi &= \frac{\lambda (n_1 + n_2)(1 + n_1) + 2\beta n_1 (1 + n_2)}{(1 + n_1)(1 + n_2)(\lambda + \beta)}, \quad \Theta = \frac{(n_1 - n_2)}{(1 + n_2)(\beta + \lambda)}, \\ \beta_1 &= \beta \frac{(1 + n_2)}{(1 + n_1)}, \quad \beta_2 = \beta \frac{n_1 (1 + n_2)}{n_2 (1 + n_1)}, \quad \Omega_0 = (k + k^3)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Для простоты сначала рассмотрим задачу об устойчивости границы типа газ-жидкость. В этом случае плотность газа можно считать исчезающе малой, так что: $\gamma_2 \gg \gamma_1$; $n_3 \gg 1$. Кроме того, отметим, что в уравнении (1.26) имеется

малый параметр M , имеющий смысл безразмерной вязкости. Действительно, выбирая, например $\gamma_2 \approx 10^3 \text{ кг / м}^3$, $\alpha \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ Н / м}$, $\nu \approx 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$, получим $M \approx 10^{-3} \ll 1$. Последнее обстоятельство позволяет представить критическую величину поля и частоту нейтральных колебаний в виде рядов по малому параметру M . Для того, чтобы колебания поверхности нарастали, необходимо восполнение полем энергии, диссипируемой за счет вязкости. Поэтому следует положить

$$\begin{aligned} B_{1*} &= a_1 M^{1/2} + a_3 M + a_4 M^{3/2} + \dots, \\ \lambda &= i(\Omega_0 + b_2 M^{1/2} + b_3 M + b_4 M^{3/2} + \dots). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Подставляя эти выражения в (1.26), можно определить коэффициенты разложения (1.28). В нулевом приближении по M находим

$$\Omega_0 = (k + k^3)^{1/2}. \quad (1.29)$$

Следующий порядок приближения при $n_3 \gg 1$ дает $a_1 = b_2 = 0$. Наконец в первом порядке приближения по M удастся определить коэффициенты a_3 и b_3 . В результате получаем

$$B_{1*} = M \frac{(1 + n_1)(1 + n_2)(\Omega_0^2 + \beta^2)}{\beta(n_1 - n_2)}. \quad (1.30)$$

Малая поправка к частоте нейтральных колебаний не существенна, поэтому можно считать, что в точке кризиса устойчивости

$$\lambda = \pm i(k + k^3)^{1/2} = \pm i\Omega_0. \quad (1.31)$$

Из полученных результатов видно, что колебательная неустойчивость возможна только при определенном соотношении между свойствами сред. А именно, должно быть $(n_1 - n_2) > 0$ или

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} > \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (1.32)$$

Таким образом, при условии (1.32) в системе возможна колебательная неустойчивость. Если же условие (1.32) не выполнено, то поле играет роль

добавочной "вязкости", увеличивая декремент затухания гравитационно-капиллярных волн. Кроме того, из характера зависимости критической напряженности поля от параметра релаксации β видно, что поверхность устойчива по отношению к колебательным возмущениям, если одна из сред является идеальным проводником $\beta \rightarrow \infty$, либо обе идеальными изоляторами $\beta \rightarrow 0$.

С целью получить более полную информацию о колебательной неустойчивости, был проведен численный расчет полного дисперсного отношения (1.26). Для этого в (1.26) полагалось $\lambda = i\omega$ (нейтральные колебания), после чего действительная и мнимая части уравнения полагались

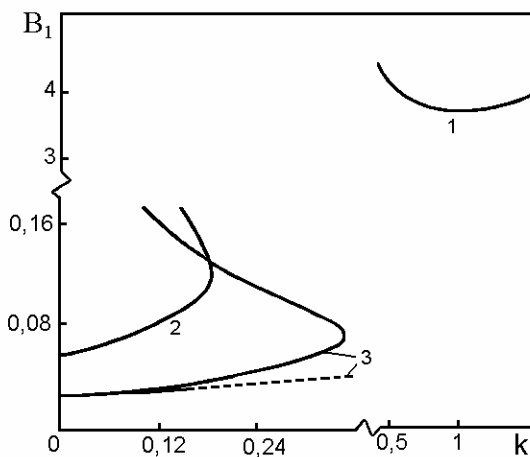


Рис. 1.3. Нейтральные кривые для монотонной неустойчивости - 1 и колебательной - 2, 3

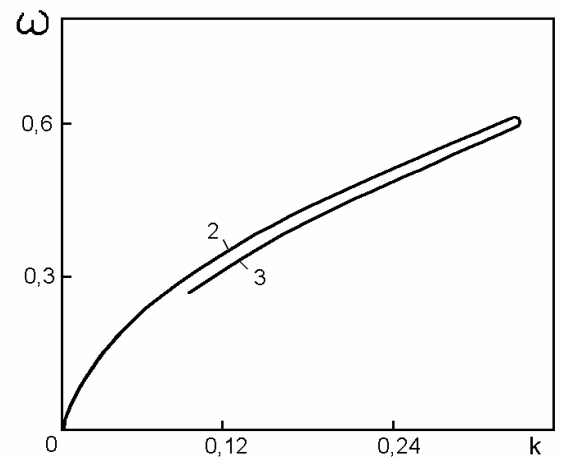


Рис. 1.4. Зависимость частоты нейтральных колебаний от волнового числа возмущений

равными нулю. Полученная система двух нелинейных алгебраических уравнений (относительно неизвестных B_1 и ω) решалась численно методом Ньютона. В качестве начальных приближений выбирались B_1 и ω , вычисленные по формулам (1.30) и (1.31). Для расчетов выбирались значения n_1 и n_2 , равные $n_1 = 2$, $n_2 = 1$. На рис.1.3 показаны нейтральные кривые, построенные для различных значений безразмерной вязкости M . Кривые 2, 3

построены для $M = 10^{-3}$; $5 \cdot 10^{-4}$; ($\beta = 1$) соответственно. Кривая 1 является нейтральной кривой монотонной неустойчивости. В этом случае критические значения параметра поля B_1 практически не зависят от величин β и M . На рис.1.4 изображены частоты нейтральных колебаний, относящиеся к нейтральным кривым 2, 3. Видно, что частоты нейтральных колебаний также практически не зависят от вязкости и параметра релаксации (при $M \ll 1$).

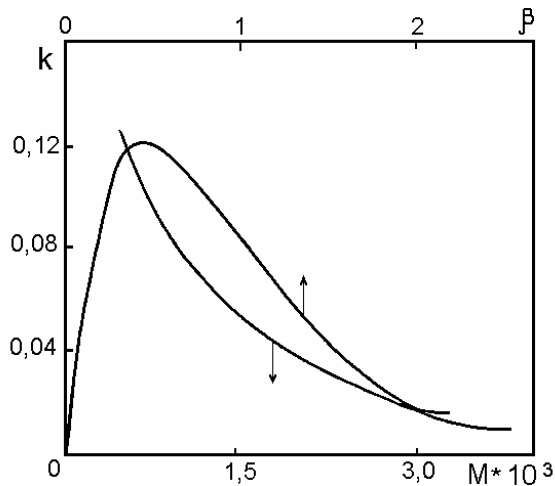


Рис. 1.5. Зависимость максимального волнового числа нейтральных возмущений от безразмерной вязкости и параметра релаксации

Выше было сказано, что монотонная неустойчивость равновесия поверхности, как в нормальном, так и в касательном поле обусловлена силами, действующими по нормали к поверхности. В случае нормального поля - это силы взаимодействия свободного заряда поверхности с приложенным внешним полем, либо поляризационные силы, то есть силы взаимодействия связанных поверхностных зарядов с внешним полем. В касательном поле силами, приводящими к развитию монотонной неустойчивости, являются поляризационные силы.

Силы же взаимодействия внешнего поля с индуцированным свободным зарядом являются сдвиговыми, то есть направлены по касательной к поверхности, и так же, как и в нормальном поле, могут быть причиной колебательной неустойчивости.

Из полученных результатов следует, что колебательная неустойчивость имеет существенно длинноволновый характер. Для каждого фиксированного значения M и β существует максимальное волновое число возмущений k_m , по отношению к которым равновесие поверхности еще может быть неустойчивым. На рис.1.5 показана зависимость величины k_m от параметров M и β . Видно, что с увеличением вязкости диапазон длин волн, по отношению к которым наступает колебательная неустойчивость, уменьшается. Тот же результат получается при переходе к пределу идеального проводника $\beta \rightarrow \infty$ и идеальных изоляторов $\beta \rightarrow 0$.

Отметим, что на рис.1.3 пунктирной прямой показана зависимость (1.30). Видим, что численный расчет подтверждает факт пропорциональности B_{1m} электропроводности и вязкости, то есть M .

Как найдено выше, минимальное критическое число B_{1m} получается из (1.30) при $k = 0$ и равно

$$B_{1m} = \beta M \frac{n_1^2(1+n_1)(1+n_2)}{n_2(n_1-n_2)}.$$

С учетом (1.27) это выражение может быть переписано в форме

$$B = \frac{\varepsilon_0^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 E_{00}^2}{\eta_2 \sigma_2} = \frac{(1+n_1)^4}{n_1(n_1-n_2)}. \quad (1.33)$$

Поскольку n_1 и n_2 зависят только от соотношения параметров сред, то порог возникновения колебательной неустойчивости в конечном итоге определяется величиной параметра B , который ответственен также и за возникновение объемной конвективной неустойчивости (см. главу 5). Порог же монотонной неустойчивости определяется величиной параметра

$$N^2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{00}^2}{(\gamma_2 g \alpha)^{1/2}}. \quad (1.34)$$

Сравнивая (1.33) и (1.34), можно видеть, что колебательная неустойчивость равновесия поверхности есть результат чисто электрогидродинамического

взаимодействия и имеет общую природу с объемной неустойчивостью, рассмотренной в пятой главе. Решающую роль в этих типах неустойчивости играет соотношение между вязкими и кулоновскими силами. Причем, для поверхностного взаимодействия эти силы существенно сдвиговые.

В случае же монотонной неустойчивости определяющим является соотношение между электрическими и капиллярными силами. Сделанное замечание остается справедливым и в случае касательного поля (см. следующий параграф).

Отметим, что все результаты были получены в предположении, что возмущения имеют форму $\sim \exp\{\lambda t - ikx\}$. Однако, все соотношения остаются справедливыми и для возмущений, имеющих форму

$$\xi \sim \exp\{\lambda t - ik_x x - ik_y y\}$$

с той разницей, что в последнем случае во всех соотношениях

$$k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}.$$

Этот результат - следствие того факта, что нормальное поле не выделяет какого-либо направления на плоскости (x, y) , так что волновые числа k_x и k_y должны входить в окончательный результат симметрично.

В заключение этого параграфа заметим, что результат о возможности колебательной неустойчивости только для таких сред, у которых

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} > \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad (1.35)$$

полученный выше для предельного случая $\gamma_2 \gg \gamma_1$, легко обобщается и на случай произвольных отношений $\gamma_2/\gamma_1 = n_3$. Для этого в полном дисперсионном соотношении (1.23) достаточно перейти к пределу $M \rightarrow 0$ и положить: $\lambda = i\Omega + \delta$, $|\delta| \ll |\Omega|$. Вычисляя δ , находим, что δ не зависит от

отношения γ_2/γ_1 и $\delta > 0$ (неустойчивость) получается вновь при $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} > \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$.

1.3. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В КАСАТЕЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В этом разделе рассматривается устойчивость равновесия поверхности в касательном поле. Напомним, что подробно эта задача была рассмотрена в [37]. Однако в настоящей работе будут получены некоторые новые результаты и обобщены результаты [37].

Предположим, что равновесное поле направлено таким образом, что $\vec{E} = \{E_{00}, 0, 0\}$ (рис.1.2). При этом направление x на плоскости является выделенным. Поэтому, вообще говоря, нельзя получить результаты для возмущений, зависящих одновременно от x и y , решив задачу для возмущений, зависящих только от x или только от y . По этой причине рассмотрим возмущения, имеющие форму

$$w = w_0(z) \exp\{\lambda t - ik_x x - ik_y y\}, \quad w = \{\vec{v}, \vec{e}, p, \xi\}.$$

Решения уравнений для амплитуды возмущений в объеме в данном случае будут теми же, что и (1.4), а линеаризованная система граничных условий (1.5) имеет вид

$$\begin{aligned} [v_x] &= [v_y] = [v_z] = 0, \quad v_{z1} = \lambda \xi, \\ [e_x] &= 0, \quad \left[\eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - ik_y v_z \right) \right] = 0, \\ E_{00} \varepsilon_0 \left[\varepsilon (e_z + ik_x \xi E_{00}) \right] &+ \left[\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] = 0, \\ -[p] + g[\gamma] \xi - \alpha k^2 \xi \left[2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] - \varepsilon_0 E_{00} [\varepsilon e_x] &= 0, \\ \lambda \varepsilon_0 \left[\varepsilon (e_z + ik_x \xi E_{00}) \right] &+ [\sigma (e_z + ik_x \xi E_{00})] = 0. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Параметры сред σ , ε , γ , ν будем считать произвольными (в рамках приближения ЭГД), однако для того, чтобы упростить решение задачи,

предположим, как и в случае нормального поля, что кинематические вязкости сред одного порядка $v_1 \approx v_2 = v$. Подставляя решения (1.4) в систему граничных условий (1.36), получим однородную систему алгебраических уравнений для определения постоянных интегрирования. Условие разрешимости этой системы приводит к следующему дисперсионному соотношению:

$$\begin{aligned}
 & - \left(\Omega^2 + \lambda^2 + \frac{AE_{00}^2 k_x^2 [\varepsilon]}{\{\varepsilon\}} \right) (m-1) - 4k^2 \lambda^2 \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\{\gamma\}} - 4\lambda k^2 v (m-1) \frac{[\gamma]^2}{\{\gamma\}^2} + \\
 & + 4k^4 v (m-1)^2 \frac{[\gamma]^2}{\{\gamma\}^2} + \frac{2E_{00}^2 k_x^2 (\sigma_2 \varepsilon_1 - \sigma_1 \varepsilon_2)}{\{\gamma\}(\lambda\{\varepsilon\} + \{\sigma\})} \times \\
 & \times \left(\frac{[\gamma]}{\{\gamma\}} (m-1) + \frac{2k(\gamma_2 - \gamma_1)}{\lambda\{\gamma\}} (m-1)^2 \right) = 0, \\
 & \Omega^2 = - \frac{gk(\gamma_1 - \gamma_2)}{\gamma_1 + \gamma_2} + \frac{\alpha k^3}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad A = \frac{\lambda[\varepsilon] + [\sigma]}{\lambda\{\varepsilon\} + \{\sigma\}}.
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

Следует отметить, что в уравнении (1.37) имеются два слагаемых, содержащих поле. Причем первое слагаемое, пропорциональное $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$, отражает чисто поляризационный эффект поля. Тогда как второе слагаемое отражает взаимодействие приложенного поля с индуцированным на поверхности, в результате ее возмущения, свободным зарядом. В частном случае, когда эффекты электропроводности, а следовательно, и свободного заряда могут быть игнорированы (например, в высокочастотном поле), равновесие поверхности устойчиво. Действительно, если в (1.37) положить $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, то второе слагаемое обращается в нуль, а первое имеет всегда положительный знак и может быть включено в частоту затухающих гравитационно-капиллярных волн.

1.3.1. Монотонная неустойчивость

Предположим теперь, что электропроводности сред конечны и исследуем устойчивость поверхности по отношению к монотонным возмущениям. Порог

устойчивости определяется из (1.37) при $\lambda = 0$. После несложных вычислений находим

$$gk(\gamma_2 - \gamma_1) + k^3\alpha + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)k_x^2 E_{00}^2 \varepsilon_0}{\sigma_1 + \sigma_2} = 0 \quad (1.38)$$

Это равенство может быть выполнено, если только

$$(\sigma_1 - \sigma_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) < 0 \quad \text{при} \quad \gamma_2 > \gamma_1 \quad (1.39)$$

Другими словами, равновесие поверхности неустойчиво по отношению к монотонным возмущениям при выполнении одного из условий

$$\text{а) } \sigma_1 > \sigma_2, \varepsilon_1 < \varepsilon_2; \quad \text{б) } \sigma_1 < \sigma_2, \varepsilon_1 > \varepsilon_2. \quad (1.40)$$

При этом критическая напряженность поля определяется так

$$E_{0*}^2 = \left(\frac{g(\gamma_2 - \gamma_1)k}{k_x^2} + \frac{\alpha k^3}{k_x^2} \right) \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\varepsilon_0}. \quad (1.41)$$

Наиболее опасными являются возмущения с волновыми числами

$$k_x = \left(\frac{g(\gamma_2 - \gamma_1)}{\alpha} \right)^{1/2}, \quad k_y = 0.$$

Отметим, что неравенства (1.40) практически выполняются редко, так как более (менее) проводящей жидкости соответствует обычно и большая (меньшая) диэлектрическая проницаемость.

Монотонная неустойчивость в данном случае обусловлена чисто поляризационными силами, поскольку член, пропорциональный возмущенному свободному заряду на поверхности, в дисперсионном уравнении (1.37) при $\lambda = 0$ выпадает.

1.3.2. Колебательная неустойчивость

Запишем дисперсионное соотношение в безразмерной форме, считая, что система представляет собой систему типа газ-жидкость $\gamma_1 \ll \gamma_2$. Единицы измерения выберем те же, что и в (1.24), (1.25). Тогда получим

$$(\Omega_0^2 + \lambda^2 + k_x^2 B_1 A)Z + 4M\lambda k^2 Z - 4M^2 k^4 Z^2 - 2k_x^2 B_1 b \left(\frac{2k^2 M}{\lambda} Z^2 - Z \right) = 0, \quad (1.42)$$

$$\Omega_0^2 = k + k^3, \quad Z = -1 + \sqrt{1 + \frac{\lambda k^2}{M}}, \quad A = \varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \left(\frac{\lambda \left(\frac{1-n_2}{1+n_2} \right) + \beta_1}{\lambda + \beta} \right),$$

$$b = \frac{(\sigma_2 \varepsilon_1 - \sigma_1 \varepsilon_2)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\lambda + \beta)}, \quad \beta_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\Omega_m}. \quad (1.43)$$

Остальные обозначения совпадают с (1.27). Предположим, что вязкость жидкости мала, так что $M \ll 1$. Тогда, как и в случае нормального поля, можно отыскивать решение (1.42) в виде рядов по M

$$B_1 = M a_1 + M^2 a_2 + \dots, \quad \lambda = i(\Omega_0 + b_1 M + b_2 M^2 + \dots).$$

Подставляя разложение в дисперсионное соотношение и разделяя действительную и мнимую части, с точностью до малых первого порядка по M найдем

$$B_{1*} = M \frac{(\beta^2 + \Omega_0^2)(1+n_1)(1+n_2)}{2\beta n_2(n_1 - n_2)}, \quad \lambda = i(\Omega_0 + b_1 M). \quad (1.44)$$

Поправка к частоте нейтральных колебаний нас интересоваться не будет, поэтому выражение для b_1 не выписывается. Как и прежде, B_{1*} имеет смысл критического числа по отношению к возникновению колебательной неустойчивости только в том случае, если $n_1 > n_2$ или

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} > \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad \text{при} \quad \gamma_2 \gg \gamma_1. \quad (1.45)$$

Таким образом, при условии (1.45) в системе возможна колебательная неустойчивость. Минимальное критическое число (1.44) соответствует длинноволновым возмущениям $k_x \approx k_y \rightarrow 0$ и равно

$$B_{1m} = M\beta \frac{(1+n_1)(1+n_2)}{2n_2(n_1 - n_2)}. \quad (1.46)$$

В сущности, кризис определяется величиной параметра $B_1/(M\beta)$ и соотношение (1.46) может быть переписано в форме

$$B = \frac{\varepsilon_0^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 E_{00}^2}{\eta_2 \sigma_2} = \frac{(1 + n_1)^2}{2(n_1 - n_2)}. \quad (1.47)$$

Численное решение дисперсионного соотношения показывает [37], что, как и в случае нормального поля, существует максимальное волновое число возмущений, по отношению к которым равновесие еще может быть неустойчивым. Используя результат [37] и принятые здесь обозначения можно записать

$$k_{\max} = \sqrt{\frac{n_2 \beta (n_1 - n_2)}{(1 - n_2)^2 (1 + n_1) M}}. \quad (1.48)$$

Для рассматриваемого случая касательного поля оказывается возможным аналитически получить более общее условие, чем (1.45). (В [37] это не сделано).

Действительно, пусть соотношение между плотностями жидкостей произвольно. В пределе исчезающе малой вязкости полное дисперсионное соотношение (1.37) может быть представлено в форме

$$\lambda^3 + \beta \lambda^2 + (\Omega_0^2 + B_1 k_x^2 a_1) \lambda + \beta \Omega_0^2 + B_1 k_x^2 b_1 = 0, \quad a_1 = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad (1.49)$$

$$b_1 = \frac{((\sigma_1 - \sigma_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + 2(\sigma_1 \varepsilon_2 - \sigma_2 \varepsilon_1)) \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \right)}{\Omega_m (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

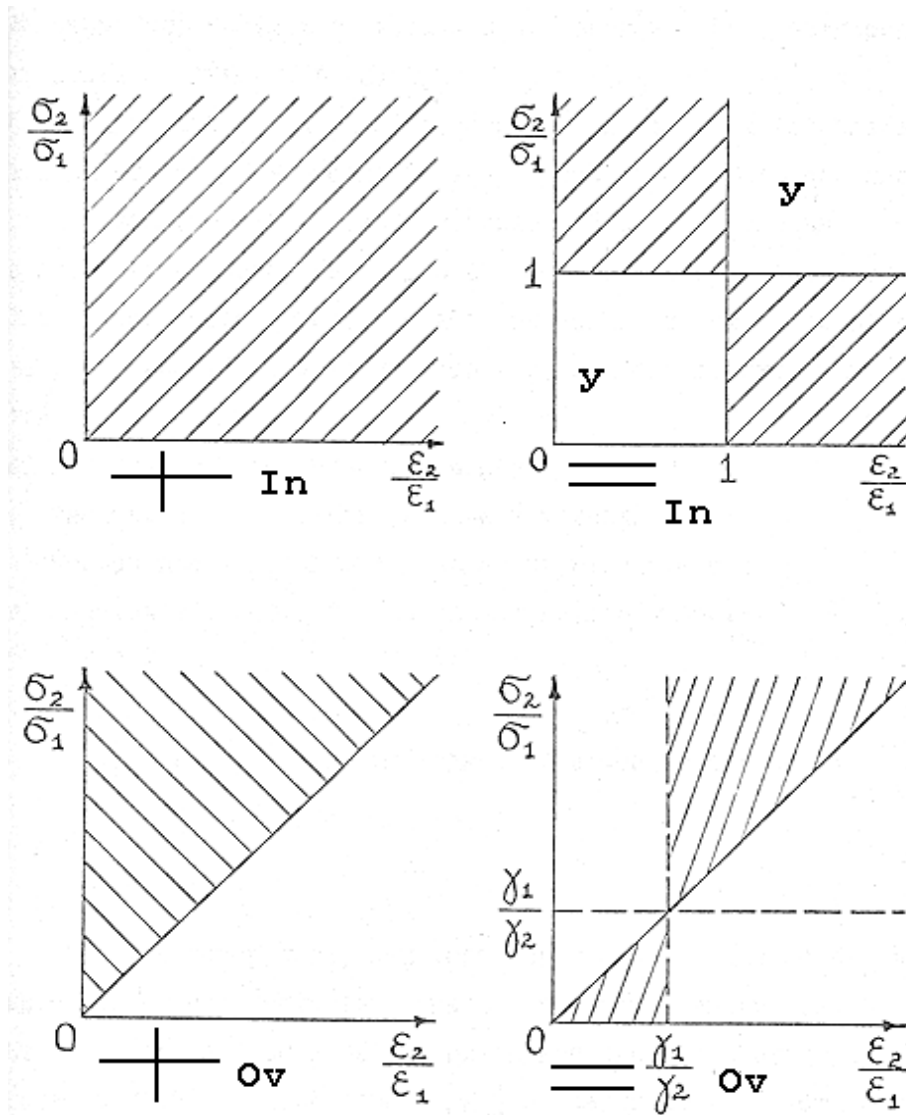


Рис. 1.6. Единые диаграммы областей параметров сред, для которых равновесие плоской границы раздела может быть неустойчивым (заштриховано). In - монотонная неустойчивость, Ov - колебательная

Запишем $\lambda = i\omega + \delta$, где $|\delta| \ll |\omega|$. После подстановки λ в (1.49) с точностью до малой δ первого порядка получим

$$\omega^2 = \Omega_0^2 + 2\delta\beta + B_1^2 k_x^2 a_1,$$

$$\delta = 4B_1 k_x^2 \frac{\beta \varepsilon_1 (n_1 - n_2)(n_2 n_3 - 1)}{(\Omega_0^2 + \beta^2)(1 + n_1)(1 + n_2)(1 + n_3)}, \quad (1.50)$$

$$n_3 = \gamma_2 / \gamma_1.$$

При $\delta > 0$ колебания с частотой, близкой к гравитационно-капиллярной Ω_0 , нарастают. Условие $\delta > 0$, в сущности, означает $(n_1 - n_2)(n_2 n_3 - 1) > 0$. В раскрытой форме последнее условие сводится к одному из двух условий

$$\text{а) } \frac{\sigma_2}{\sigma_1} > \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} > \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad \text{б) } \frac{\sigma_2}{\sigma_1} < \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} < \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \quad (1.51)$$

Заметим, что результат (1.45), полученный и в [43], является предельным случаем (1.51) при $n_3 \gg 1$. Полученные результаты позволяют сделать важные обобщающие выводы относительно возможности неустойчивости того или иного типа в зависимости от свойств жидкостей как в нормальном, так и в касательном поле. На рис.1.6 представлены единые диаграммы областей параметров сред, для которых возможен тот или иной тип неустойчивости (неустойчивость возможна для штрихованных областей):

- а) нормальное поле, монотонная неустойчивость;
- б) касательное поле, монотонная неустойчивость;
- в) нормальное поле, колебательная неустойчивость;
- г) касательное поле, колебательная неустойчивость.

1.4. О РЕЖИМАХ ВОЗНИКНОВЕНИЯ СТАТИЧЕСКОГО РЕЛЬЕФА НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Исследования неустойчивости равновесия границы раздела жидкостей в электрическом поле в нелинейной по возмущениям постановке позволяют ответить на такие, например, важные вопросы как вопрос о возможных режимах возникновения неустойчивости.

Выяснению возможных режимов возникновения неустойчивости равновесия границы раздела в нормальном электрическом поле в нелинейной постановке для двух групп граничных условий были посвящены, например, работы [30, 40]. Так в работе [40] при использовании граничных условий (1.14) было найдено, что при $\varepsilon_2 / \varepsilon_1 < 3,54$ режим возникновения неустойчивости

мягкий, а при $\varepsilon_2 / \varepsilon_1 > 3,54$ - жесткий. В работе [30] использовалась другая группа граничных условий (1.13) и было установлено, что также возможны два указанных режима возникновения неустойчивости, однако условие их смены получается другим. В [30], в частности, найдено, что смена режимов определяется величиной свободного равновесного заряда на поверхности.

Ниже, используя метод [40] и граничные условия (1.13), показано, что, во-первых, разные условия смены режимов неустойчивости, полученные в [30] и [40], могут быть объединены в одно, более общее условие, во-вторых, в случае проводящей поверхности условие смены режимов, вообще говоря, не определяется величиной свободного заряда на поверхности [179].

Итак, рассмотрим статическое состояние хорошо проводящей поверхности в электрическом поле, возникающее после потери устойчивости. Предположим, что структура поверхности периодическая вдоль оси x , так что уравнение деформированной поверхности имеет вид $z = \xi(kx)$. В статическом состоянии на поверхности выполняется условие баланса всех сил, а касательная компонента поля обращается в нуль. Тем самым граничные условия будут следующими

$$\Delta p - (\gamma_2 - \gamma_1)g\xi + n_i \varepsilon_0 [\varepsilon E_i E_n] - \frac{\varepsilon_0}{2} [\varepsilon E^2] = \alpha / R,$$

$$\vec{n} \times \vec{E}_1 = \vec{n} \times \vec{E}_2 = 0, R = - \left(1 + \xi_x'^2 \right)^{3/2} / \xi_x'', \quad (1.52)$$

$$\vec{n} = \left\{ -\frac{\xi_x'}{\sqrt{1 + \xi_x'^2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_x'^2}} \right\} \quad - \text{единичный вектор нормали, } \Delta p - \text{перепад}$$

гидростатического давления, а R - радиус кривизны. Равенство касательных компонент силы выполняется тождественно в силу граничных условий (1.13). Напряженность поля представим в виде суммы

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{i0} - \nabla \varphi_i, \quad i = 1, 2. \quad (1.53)$$

Пусть амплитуда статического рельефа мала и равна a . Следуя [40], запишем все величины в виде ряда по малой амплитуде, сохраняя члены не старше кубического (здесь учтено, что φ_i удовлетворяют уравнению Лапласа)

$$\xi(x) = a \cos kx + a^2 \beta \cos 2kx + a^3 \gamma \cos 3kx + \dots,$$

$$\varphi_1 = aA_1 \cos kxe^{-kz} + a^2 B_1 \cos 2kxe^{-2kz} + a^3 (c_{11} \cos kxe^{-kz} + c_{31} \cos 3kxe^{-3kz}) + \dots, \quad (1.54)$$

$$E_{i0} = E_{i0}^* + a^2 E_{i2} + \dots, \quad k = k_m + a^2 k_2 + \dots, \quad i = 1, 2.$$

Выражение для φ_2 имеет такой же вид, что и для φ_1 , но со знаком $+$ в показателе экспоненты. Подставляя разложения (1.54) в граничные условия (1.52) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях a , получим в линейном приближении известный результат

$$\{\varepsilon E_0^{*2}\} = 2\alpha k_m / \varepsilon_0.$$

В квадратичном по a приближении определяются коэффициенты разложения $\beta, B_{1,2}$. В третьем порядке удастся определить коэффициенты c_{11}, c_{12} и поправки к критической напряженности E_{12}, E_{22} . Запишем, опуская громоздкие выкладки, окончательное выражение, определяющее поправки к критической напряженности

$$\frac{\{\varepsilon E_0^* E_{i2}\}}{\{\varepsilon E_0^{*2}\}} = \frac{k_m}{2} \left(\frac{5}{16} - \eta^2 \right), \quad \eta^2 = \frac{[\varepsilon E_0^2]^2}{\{\varepsilon E_0^2\}^2}. \quad (1.55)$$

Амплитуду статического рельефа теперь можно найти так

$$a = \sqrt{\frac{E_{10} - E_{10}^*}{E_{12}}}.$$

Из полученных соотношений видно, что в зависимости от величины безразмерного параметра η возможно ветвление статического решения как назад, так и вперед. При $\eta < \sqrt{5}/4$ имеем ветвление вперед - мягкий режим неустойчивости, при $\eta > \sqrt{5}/4$ ветвление назад - жесткий режим неустойчивости.

Пусть каждая из сред обладает конечными электропроводностями $\sigma_{1,2}$. Тогда в стационарном состоянии равновесия на поверхности накоплен свободный заряд

$$Q = \varepsilon_0 [\varepsilon E_0] = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{10} \left(1 - \frac{\varepsilon_2 \sigma_1}{\varepsilon_1 \sigma_2} \right).$$

Здесь использовано условие $E_{20} / E_{10} = \sigma_1 / \sigma_2$. Если $\sigma_1 / \sigma_2 = \varepsilon_1 / \varepsilon_2$, то свободный заряд $Q = 0$, но при этом $\eta \neq 0$ так, что сохраняется возможность жесткого режима развития неустойчивости. Напомним, что в [30] возможность жесткого режима связывалась исключительно с наличием на поверхности свободного заряда.

Покажем теперь, что условие смены механизмов неустойчивости $\eta > \sqrt{5} / 4$, полученное выше, пригодно также и для случая идеальных диэлектриков. В этом случае $E_{20} / E_{10} = \varepsilon_1 / \varepsilon_2$. Тогда для η^2 получим следующее выражение

$$\eta^2 = \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \right)^2$$

и условие смены режимов возникновения неустойчивости в данном случае будет иметь вид

$$\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \right)^2 > \frac{5}{16}. \quad (1.56)$$

С другой стороны, преобразование функции

$$f(\varepsilon) = \frac{42\varepsilon - 11(\varepsilon^2 + 1)}{32(\varepsilon + 1)^2},$$

полученной в работе [40], и ответственной за смену режимов неустойчивости в случае идеальных диэлектриков (при $f > 0$ - мягкий режим, при $f < 0$ - жесткий) дает

$$f = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{16} - \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \right)^2 \right).$$

Видим, что условие возникновения жесткого режима неустойчивости и в этом случае совпадает с (1.56).

Таким образом, общим условием смены режимов неустойчивости равновесия границы раздела жидкостей (проводящих и непроводящих) следует считать условие

$$\frac{[\varepsilon E_0]^2}{\{\varepsilon E_0\}^2} > \frac{5}{16}. \quad (1.57)$$

Так как $\varepsilon_0 \varepsilon E_0^2 / 2$ представляет собой электрическое давление, то смысл (1.57) заключается в том, что для осуществления жесткого режима возникновения статического рельефа границы раздела жидкостей в электрическом поле необходима достаточно большая величина относительного скачка равновесного электрического давления (механического напряжения) на границе раздела жидкостей.

1.5. К ТЕОРИИ КРИЗИСА КИПЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Как уже говорилось, некоторыми процессами тепломассообмена можно эффективно управлять и значительно интенсифицировать их с помощью электрического поля. Это касается и процессов кипения и конденсации в электрическом поле [3, 4, 6, 43-46]. В частности, в работах [43, 45, 46] экспериментально установлено существенное влияние внешнего электрического поля на такие характеристики кипения, как отрывной диаметр пузыря, критический тепловой поток, коэффициент теплоотдачи и др.

В настоящем параграфе теория устойчивости равновесия границы раздела, изложенная в предыдущих параграфах, будет применена для расчета основных характеристик кипения в электрическом поле [182] и сравнения их с экспериментами [43].

Как известно, существуют два основных режима кипения: пузырьковое и пленочное. В первом случае теплоток, подводимый к жидкости, мал и на

поверхности образуются отдельные пузыри, которые затем всплывают под действием силы Архимеда. Во втором случае, который имеет место при существенно больших тепловых потоках, над поверхностью нагрева образуется сплошная пленка пара. Переход от первого режима ко второму носит название первого кризиса кипения. Так как при пленочном кипении резко ухудшается теплоотдача жидкости и уменьшается интенсивность парообразования, то это является нежелательным явлением. Переход к пленочному кипению совершается при определенном критическом значении теплотока q_{*1} . Обратный переход от пленочного режима к пузырьковому носит название второго кризиса кипения и также происходит при определенном значении теплотока q_{*2} , причем $q_{*1} > q_{*2}$ [90, 91]. Многими авторами отмечается гидродинамическая природа кризисов кипения, связанная с устойчивостью двухфазной структуры приповерхностного слоя (см., например, [90]).

Относительно устойчивая пленка пара, образовавшаяся при пленочном кипении, разрушается с уменьшением теплового потока. Причем, как показано, например, в [92], неустойчивость поверхности имеет характер релей-тейлоровской неустойчивости.

В предыдущих параграфах было показано, что электрическое поле играет существенно дестабилизирующую роль в отношении устойчивости равновесия плоской границы раздела двух жидкостей. Тем самым наложение электрического поля, по-видимому, должно способствовать тому, что первый кризис кипения будет иметь место при существенно больших теплотоках. Интенсивность тепло-массообмена при этом также существенно увеличится. Более того, в условиях пониженной гравитации электрические поверхностные силы могут играть роль гравитационных, что, в свою очередь, может позволить управлять с помощью электрического поля кризисом кипения и в условиях невесомости.

Рассмотрим кипение жидкости на проволочке в радиальном электрическом поле. Следуя подходу, развитому в работе [92], рассмотрим упрощенную двумерную модель процесса пленочного кипения на горизонтальном

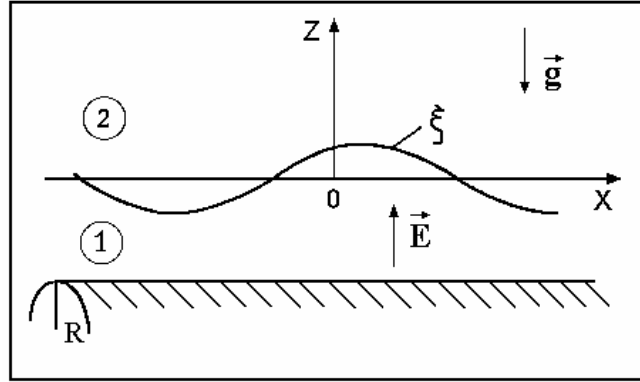


Рис. 1.7. Нагреватель (электрод) и оси координат

цилиндрическом нагревателе. Нагреватель является одним из электродов. Будем предполагать, что второй электрод находится на расстоянии много большем, чем толщина паровой пленки, так что поле вблизи межфазной поверхности можно считать радиальным (рис.1.7).

Жидкость и пар будем считать несжимаемыми невязкими и однородными в объеме (объемные заряды отсутствуют). Обозначая малые возмущения поверхности жидкости ξ , скорости $\vec{v} = -\nabla\Phi$, поля $\vec{e} = -\nabla\varphi$ и давления p , получим следующие линеаризованные уравнения для возмущений в объемах каждой из сред:

$$\Delta\Phi_{1,2} = 0, \quad \Delta\varphi_{1,2} = 0, \quad p_{1,2} = -\frac{\partial\Phi_{1,2}}{\partial t}\gamma_{1,2} - \gamma_{1,2}gz. \quad (1.58)$$

Индекс 1 относится к пару, 2 - к жидкости. Будем отыскивать решение для возмущений в форме

$$w(x, z, t) = w_0(z)\exp\{-i\omega t + ikx\}. \quad (1.59)$$

При этом будем считать, что толщины пленки пара и слоя жидкости много больше, чем длина волны, т.е. $kh_1 \gg 1$ и $kh_2 \gg 1$. Был рассмотрен также случай произвольных толщин, а затем осуществлен переход к пределу $kh_1 \ll 1$ (тонкая

пленка пара) и $kh_2 \gg 1$. Однако сравнение результатов показывает, что различие между этими типами приближений в конечном итоге сказывается лишь на величине несущественных постоянных коэффициентов. Поэтому в целях простоты решения будем использовать первый тип приближения.

Подставляя (1.59) в (1.58) и интегрируя с учетом того, что все возмущения исчезают при $z \rightarrow \pm\infty$, получим

$$\begin{aligned} \Phi_{1,2} &= A_{1,2} e^{\mp kz} \exp\{-i\omega t + ikx\}, \quad \varphi_{1,2} = \pm C_{1,2} e^{\mp kz} \exp\{-i\omega t + ikx\}, \\ p_{1,2} &= (i\omega \gamma_{1,2} A_{1,2} e^{\mp kz} - \gamma_{1,2} g \xi') \exp\{-i\omega t + ikx\}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Постоянные интегрирования A_1 , A_2 , C_1 , C_2 , ξ' должны определяться из граничных условий (1.5). Запишем систему граничных условий, с учетом следующих замечаний.

Будем считать жидкости настолько слабопроводящими, что поведение границы раздела можно было рассматривать как поведение границы раздела идеальных диэлектриков. Тогда на границе имеем

$$Q = \varepsilon_0 \vec{n} [\varepsilon \vec{E}] = 0. \quad (1.61)$$

В условии равенства нормальных компонент сил капиллярное давление представим в виде двух слагаемых, одно из которых обусловлено кривизной теплоотдающей поверхности (внутреннего электрода), другое - кривизной возмущенной границы раздела. Тогда возмущенная часть лапласовского давления получается равной

$$p'_\wedge = -\alpha \left(\frac{\xi}{2R^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right). \quad (1.62)$$

при $\xi' \ll R$. Здесь R - радиус теплоотдающей поверхности. Заметим, что в работе [46], посвященной аналогичной проблеме, первое слагаемое в скобках (1.62) необоснованно пропущено.

Поле вблизи внутреннего цилиндра, соответствующее равновесию границы раздела пар - жидкость, представим в форме

$$\vec{E}_p = \left(E_{00}^2 - DE^2 z\right)^{1/2} \vec{i}_z,$$

где DE^2 - поправка на неоднородность поля. При толщине пленки пара, значительно меньшей расстояния между электродами можно считать

$$DE^2 \approx \frac{2E_{20}^2}{R}.$$

Тогда на возмущенной границе, в линейном по ξ приближении, будем иметь

$$\vec{E} = \left(E_{00}^2 + 2E_{00}e_z - E_{20}^2 \frac{2\xi}{R}\right)^{1/2} \vec{i}_z + e_x \vec{i}_x.$$

С учетом сделанных замечаний и (1.6)-(1.12) линеаризованная система граничных условий при $z = 0$ в данном случае получается следующей:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad [e_x] + \frac{\partial \xi}{\partial x} [E_{00}] = 0,$$

$$[\varepsilon e_z] - DE^2 \left[\frac{\varepsilon}{E_{00}} \right] \xi = 0,$$

$$[p] - \alpha \left(\frac{\xi}{2R^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) + \varepsilon_0 [\varepsilon e_z E_{00}] - \varepsilon_0 E_{20}^2 \frac{[\varepsilon]}{R} \xi = 0. \quad (1.63)$$

Подставляя решение (1.60) в граничные условия (1.63), получим однородную систему алгебраических уравнений для коэффициентов $A_{1,2}$, $C_{1,2}$ и ξ' , условие разрешимости которой приводит к следующему дисперсионному соотношению:

$$\omega^2 = - \left(\frac{gk(\gamma_2 - \gamma_1)}{\gamma_2 + \gamma_1} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 E_{20}^2 k^2}{\varepsilon_1 (\varepsilon_2 + \varepsilon_1) (\gamma_1 + \gamma_2)} + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon_0 E_{20}^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) k}{R(\gamma_1 + \gamma_2)} + \frac{\alpha k}{2R^2(\gamma_1 + \gamma_2)} - \frac{\alpha k^3}{\gamma_1 + \gamma_2} \right) \quad (1.64)$$

Выражение, стоящее в высоких скобках, представляет собой инкремент растущих возмущений. Исследуя ω на максимум, найдем волновое число наиболее опасных возмущений. Считая, что половина соответствующей длины

волны будет определять средний отрывной диаметр пузыря в переходном режиме кипения [92], после несложных преобразований получим

$$d_E = d_0 \left(\frac{B^2 R_1}{\sqrt{3(R_1^2 + 1/2)}} + \left(1 + \frac{B^4 R_1^2}{3(R_1^2 + 1/2)} + \frac{B^2 f R_1}{R_1^2 + 1/2} \right)^{1/2} \right)^{-1}, \quad (1.65)$$

$$d_E = \pi/k_{\max} = \lambda_{\max}/2.$$

Здесь B , R_1 , f - безразмерные величины, определенные так:

$$B^2 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 E_{20}^2 \varepsilon_0}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sqrt{\alpha g(\gamma_2 - \gamma_1)}}, \quad R_1 = R \sqrt{\frac{g(\gamma_2 - \gamma_1)}{\alpha}}, \quad f = \frac{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}, \quad (1.66)$$

$$d_0 = \pi \sqrt{3} \left(\frac{g(\gamma_2 - \gamma_1)}{\alpha} + \frac{1}{2R^2} \right)^{-1/2} - \text{отрывной диаметр пузыря в отсутствии поля.}$$

При $R_1 \rightarrow \infty$ (кипение на плоском электроде) формула (1.65) переходит в зависимость, найденную в работе [45].

Критический тепловой поток определялся из условия, что в точке кризиса скорость роста наиболее опасных возмущений порядка скорости парообразования, то есть

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \approx \text{Im}(\omega(k_m)) a_s \approx \frac{q_*}{r \gamma_1},$$

r - удельная теплота парообразования, a_s - капиллярная постоянная. Используя выражения (1.65) и (1.66), получим зависимость критического теплового потока от поля в следующей форме:

$$q_* = q_{*0} \left(\frac{B^2}{2\sqrt{3}} + \frac{1 + 1/4R_1^2 + B^2 f/2R_1}{\left(1 + 1/2R_1^2 + B^4/3 + B^2 f/R_1 \right)^{1/2} + B^2/\sqrt{3}} \right). \quad (1.67)$$

Здесь $q_{*0} = \text{constr} \sqrt{\gamma_1} (\alpha g(\gamma_2 - \gamma_1))^{1/4}$ - значение критического теплового потока в отсутствии электрического поля. При $R_1 \rightarrow \infty$ из (1.67) имеем

$$q_* = q_{*0} \left(\frac{B^2}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\left(B^2/\sqrt{3} + (1 + B^4/3)^{1/2} \right)} \right). \quad (1.68)$$

Интересно отметить, что при малых значениях поля наблюдается уменьшение величины критического теплового потока. Действительно, при $B^2 \ll 1$ из (1.68) имеем

$$q_* = q_{*0} \left(1 - B^2/4\sqrt{3} \right).$$

Минимум q_* достигается при $B \approx 1$ и равен $0,86q_{*0}$. При больших полях $B \gg 1$ величина критического теплового потока растет пропорционально напряженности поля.

Относительно теплоотдачи при кипении жидкости в электрическом поле заметим следующее. Для расчета коэффициента теплоотдачи при развитом пузырьковом кипении насыщенной жидкости, когда роль конвекции незначительна и теплоотдача полностью определяется парообразованием, обычно используют критериальные уравнения вида [73]:

$$Nu = const(R_k)^n (P)^m,$$

где Nu - число Нуссельта, R_k - число Рейнольдса, определенное через скорость парообразования, P - число Прандля:

$$Nu = \frac{\beta a_s}{x}, \quad R_k = \frac{q a_s}{r \gamma_1 v}, \quad P = \frac{v}{\chi},$$

β - коэффициент теплоотдачи, χ - коэффициент температуропроводности. В качестве характерной длины выбирается обычно величина, пропорциональная отрывному диаметру d_0 пузыря, а именно, капиллярная постоянная a_s . Например, для развитого пузырькового кипения в [90] предлагается критериальная зависимость

$$N_u = const(R_k)^{0,7} (P)^{1/3}. \quad (1.69)$$

Относительное увеличение коэффициента теплоотдачи в электрическом поле с использованием (1.69) определится так

$$\frac{\beta_E}{\beta_0} = \left(\frac{d_0}{d_E} \right)^{0,65}. \quad (1.70)$$

На рис.1.8 представлены зависимости безразмерного отрывного параметра пузыря от безразмерного параметра поля, построенные по уравнению (1.65).

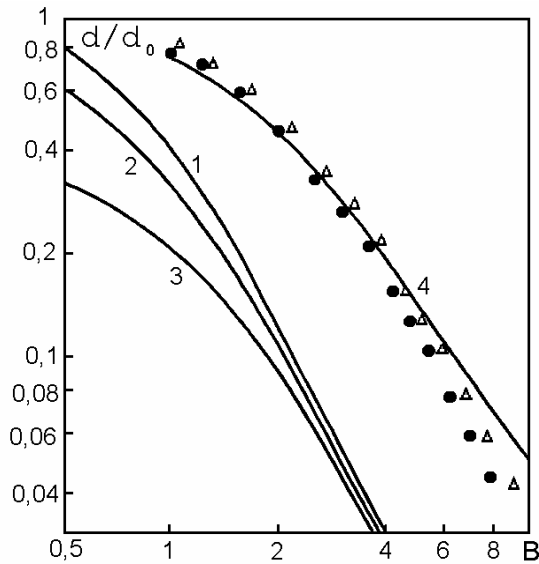


Рис. 1.8. Зависимости безразмерного отрывного диаметра пузыря от безразмерной напряженности поля в логарифмических координатах

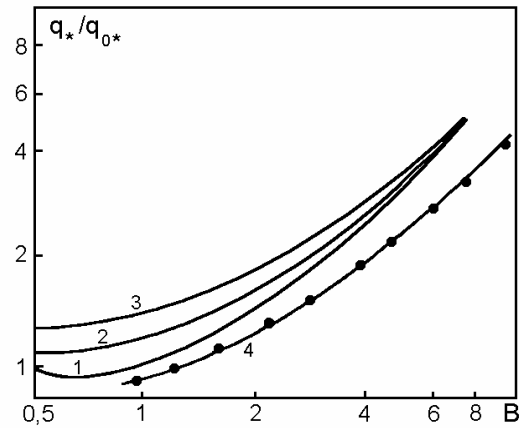


Рис. 1.9. Зависимости безразмерного критического теплового потока от безразмерной напряженности поля в логарифмических координатах

Кривым 1, 2, 3 соответствуют $R_1 = 100, 1, 0,3$. При построении кривой 4 в качестве d_0 был взят отрывной диаметр пузыря, определенный по данным [43]. Точки соответствуют экспериментальным данным работы [43]. На рис.1.9 представлены зависимости критического теплопотока от безразмерного параметра поля. Кривым 1, 2, 3 соответствуют такие же R_1 , как и на рис.1.8. При построении кривой 4 в качестве q_{0*} использовалось значение критического теплопотока, найденное по результатам [43]. Точки тоже соответствуют результатам работы [43].

Таким образом, видно, что предлагаемая полуэмпирическая теория кризиса кипения в электрическом поле находится в удовлетворительном согласии с

экспериментальными данными и полученные результаты могут быть использованы при планировании соответствующих экспериментов.

Рассмотрим теперь кипение в условиях невесомости [6]. В условиях невесомости можно положить $g=0$, тогда кризис кипения и теплообмена в отсутствии электрического поля будет наступать практически при $q=0$. Наложение внешнего электрического поля может привести к дестабилизации границы раздела пар-жидкость и, в принципе, к образованию пузырей, то есть к восстановлению пузырькового кипения.

Для простоты рассмотрим случай кипения на плоской пластине, которая является одним из электродов. Пар и жидкость будем считать проводящими с проводимостями σ_1 и σ_2 соответственно. (Электропроводность пара может быть обусловлена, например, термоэлектронной эмиссией с теплоотдающей пластины). В равновесии уравнение поверхности жидкости $z=0$. Поле однородно, причем

$$\frac{E_{10}}{E_{20}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1},$$

а на поверхности имеется адсорбированный свободный заряд

$$Q_0 = \varepsilon_0 [\varepsilon E_0].$$

Уравнение возмущенной поверхности представим в форме

$$z = \xi_0 \exp\{\omega t - ikx\}.$$

Тогда, используя решения (1.4) и граничные условия (1.6)-(1.12) при $g=0$ с учетом того, что заряженная поверхность представляет собой идеально проводящую $E_{\tau 1} = E_{\tau 2} = 0$ (граничное условие (1.13), получим следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 = \frac{\varepsilon_0 \{\varepsilon E_0^2\} k^2 - \alpha k^3}{\gamma_1 + \gamma_2}. \quad (1.71)$$

Наибольшей скоростью роста обладают возмущения с волновым числом

$$k_m = \frac{2\varepsilon_0 \{\varepsilon E_0^2\}}{3\alpha}. \quad (1.72)$$

Аналогично тому, как это было сделано выше, для критического теплового потока находим

$$q_* = \frac{\gamma_1 r}{\sqrt{3(\gamma_1 + \gamma_2)}} \{\varepsilon_0 \varepsilon E_0^2\}^{1/2}.$$

Отметим, что при напряженности внешнего поля порядка 1 кВ/см отрывной диаметр пузыря оказывается примерно таким же, как при кипении в земных условиях, а величина критического теплотокта $q_* \approx 10^4 \text{ Вт/м}^2$.

Результат (1.72) имеет самостоятельный интерес. Действительно, для простоты будем считать одну из сред идеальной так, что $E_{20} = 0$, тогда условие неустойчивости плоской поверхности жидкости в условиях невесомости (1.72) может быть записано в универсальном виде

$$N^2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{10}^2 l_m}{4\alpha} = \frac{3\pi}{4} \approx 2,36, \quad (1.73)$$

($l_m = 2\pi / k_m$ - длина волны наиболее быстро растущих возмущений) и будет обсуждаться во второй главе.