

5. КОНВЕКТИВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ СЛАБОПРОВОДЯЩИХ ЖИДКОСТЕЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

5.1. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКИ И КОНВЕКТИВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

5.1.1. Обсуждение постановки задач

Большинство задач, рассматриваемых в настоящей главе, связаны с исследованием динамики электропроводной вязкой жидкости, помещенной между двумя параллельными пластинами, нагретыми до разных температур, и поддерживаемыми при разных потенциалах. Такая система представляет собой не что иное, как плоский конденсатор с утечкой. Несмотря на кажущуюся простоту модели, в общем случае исследование динамики жидкости в таком конденсаторе сопряжено с большими трудностями. Это связано прежде всего с тем, что в основе того или иного механического поведения жидкости лежат различные электрофизические или электрохимические процессы.

1. Диффузия ионов и образование двойного электрического слоя на границе жидкость-электрод.
2. Окислительно-восстановительная реакции на электродах и инжекция зарядов в объем жидкости.
3. Процессы диссоциации-рекомбинации в объеме.
4. Термодиффузия ионов и возникновение термоэлектрического тока (поля).
5. Джоулев разогрев жидкости.
6. Неоднородная поляризация жидкости.

Все эти процессы в определенной степени влияют на распределение электрического заряда и поля в жидкости и тем самым на распределение пондеромоторных сил, а, следовательно, и на гидродинамику слоя. Однако в

реальной ситуации некоторые из названных процессов можно не учитывать, так как они оказывают незначительное влияние на динамику в целом. В дальнейшем вклады различных эффектов будут обсуждаться особо.

В ЭДГ явлениях взаимодействие объемного свободного заряда и электрического поля (кулоновское взаимодействие) играет основную и часто решающую роль. Для этого необходимо наличие в среде достаточно большого электрического поля, такого, что

$$E \gg v_* B, \quad (5.1)$$

v_* - характерная скорость жидкости, B - индукция магнитного поля [8, 84].

С другой стороны, рассмотрение динамики жидкости в рамках электрогидродинамики предполагает малость силы $\vec{j} \times \vec{B}$ по сравнению с кулоновской

$$|\rho \vec{E}| \gg |\vec{j} \times \vec{B}|.$$

Полагая, что имеется только индуктированное магнитное поле и $B \sim \mu_0 \sigma E h$, вместо последнего условия можно получить основное приближение электродинамики

$$\frac{\mu_0 \mu \sigma^2 h^2}{\epsilon_0 \epsilon} \ll 1. \quad (5.2)$$

Как уже говорилось (см. главу 1) это есть условие малости времени магнитной диффузии по сравнению с временем релаксации объемного электрического заряда.

Запишем систему уравнений, описывающих динамику жидкости в электрическом поле. При этом не будем ставить целью выписывать наиболее общие уравнения, охватывающие широкий класс явлений ЭДГ, а ограничимся лишь некоторыми специальными случаями, в рамках которых и будут рассматриваться конкретные задачи, сформулированные в последующих параграфах. Вывод более общих уравнений ЭДГ обсуждался, например, в работах [8,84].

Система уравнений ЭДГ должна включать уравнение Навье-Стокса, уравнение непрерывности, уравнение закона сохранения энергии (уравнение переноса тепла), уравнение Максвелла, уравнение переноса зарядов и уравнение состояния среды. В уравнение Навье-Стокса наравне с архимедовыми силами, обусловленными неоднородностью температуры, включим и электрические, плотность которых равна [93]

$$\vec{f}_3 = \rho \vec{E} + \frac{\varepsilon_0}{2} \nabla \left(E^2 \gamma \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \gamma} \right)_T \right) - \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \nabla \varepsilon, \quad (5.3)$$

ρ - плотность объемных зарядов, γ - плотность жидкости.

В дальнейшем будем пренебрегать объемными силами, обусловленными неоднородной поляризацией среды по сравнению с кулоновскими. По-видимому, это возможно, если неоднородность поля, обусловленная неоднородным зарядом, достаточно велика, то есть

$$\frac{\delta E}{E} \gg \frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon} \quad (5.4)$$

В рамках ЭГД слабополярных жидкостей, которые и будут рассматриваться, это условие достаточно хорошо выполняется. (Отметим, что влияние чисто поляризационных сил на конвективную устойчивость рассмотрено, например, в [71]).

При записи уравнения переноса тепла будем считать, что внутренняя энергия единицы объема жидкости много больше плотности электрической энергии. Это возможно в том случае, если среда слабополяризующаяся и число заряженных частиц много меньше числа нейтральных. Если жидкость слабопроводящая, то можно также пренебречь эффектами Джоуля и Томсона. Действительно, согласно [93], для потока тепла в проводящей жидкости в отсутствии магнитного поля имеем

$$\vec{q}_T = (\varphi + \alpha_T T) \vec{j} - \kappa \nabla T, \quad (5.5)$$

φ -электрический потенциал, \vec{j} - плотность тока, α_T -дифференциальная термоЭДС жидкости. Пологая, например: $\kappa \approx 0,2 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$; $\delta T / h \approx 10^2 \text{ К/м}$; $E \approx 10^5 \text{ В/м}$; $h \approx 10^{-2} \text{ м}$; $\alpha_T \approx 10^{-4} \text{ В/К}$; $\sigma \approx 10^{-12} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ найдем, что по порядку величины отношение первого слагаемого к последнему в (5.5) много меньше единицы ($\sim 10^{-3}$).

В силу малых скоростей жидкости пренебрежем вязкой диссипацией энергии. При записи системы уравнений используем приближение Буссинеска, то есть изменение плотности будем учитывать только в архимедовой силе [125].

Окончательно, в рамках принятых предположений и приближений систему уравнений ЭДГ запишем в форме

$$\begin{aligned} \gamma \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \gamma (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= -\nabla p' + \eta \Delta \vec{v} - \gamma \beta T \vec{g} + \rho \vec{E}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \nabla T &= \chi \Delta T, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \\ \frac{\partial q_i}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_i &= \Gamma(q_i) - R(q_i, q_k), \quad i \neq k, \\ \vec{j}_i &= q_i \vec{v} + \text{sign}(q_i) b_i q_i \vec{E} - D_i \nabla q_i + \frac{q_i K_i}{T} \nabla T, \\ \vec{j} &= \sum_i \vec{j}_i, \quad \rho = \sum_i q_i, \\ \text{div } \vec{E} &= \rho / \varepsilon \varepsilon_0, \quad \text{rot } \vec{E} = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Здесь использованы в основном общепринятые обозначения: q_i - i -ый сорт ионов, $b_i > 0$, D_i, K_i - коэффициенты подвижности, диффузии и термодиффузии i -го сорта ионов, Γ и R - функции генерации и рекомбинации ионов, p' - давление, связанное с гидростатическим p соотношением

$$p' = p - \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \gamma \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \gamma} \right)_T - \gamma \vec{g} \vec{r}. \tag{5.7}$$

(В дальнейшем штрих будет опускаться). По мере необходимости к системе (5.6) будут добавляться термодинамические уравнения состояния среды и соотношения между кинетическими коэффициентами.

В большинстве рассматриваемых задач граничными условиями к системе (5.6) будут граничные условия первого рода, то есть, например, на границе жидкости будут считаться заданными распределение температуры, потенциала и скорости жидкости:

$$W|_S = W_0(x_S, y_S, z_S, t)$$

Другие варианты граничных условий обсуждаются особо, по мере рассмотрения конкретных задач.

В заключение этого параграфа отметим, что при наличии в жидкости достаточно сильного внешнего электрического поля и в больших объемах (размеры которого намного превышают дебаевский радиус экранирования) эффектами диффузии и термодиффузии можно пренебречь.

Однако, в отсутствии внешнего электрического поля в результате названных диффузионных эффектов могут генерироваться внутренние поля (термоэлектрическое поле, поле двойного электрического слоя), вклад которых в гидродинамику в некоторых случаях может оказаться существенным. Исследованию этого вопроса посвящена следующая глава настоящей диссертации.

5.1.2. Механизмы проводимости и зарядообразования

Как уже говорилось, сложность задачи о механическом движении жидкости в электрическом поле связана, прежде всего, с многообразием электрофизических процессов в ней. При этом принципиальное значение имеют процессы, связанные с проводимостью жидкости и образованием объемного заряда. В частности, в работах [68, 126] экспериментально обнаружено, что жидкие диэлектрики, обладающие различной по величине электропроводимостью, движутся в электрическом поле по-разному (при прочих одинаковых условиях). В связи с этим можно предположить, что

особенности движения связаны с различием в механизмах проводимости в жидких диэлектриках разной удельной электропроводимости и молекулярного состава.

Как указано выше, в работах по ЭДГ конвекции слабопроводящих жидкостей рассматриваются и развиваются два основных подхода к явлениям электропроводимости и механизмов образования объемного заряда.

Перейдем к рассмотрению указных механизмов.

Сначала вкратце рассмотрим инжекционный механизм. Для этого предположим, что в изолированной от электродов жидкости практически нет ионов. Также предположим, что при помещении такой жидкости во внешнее электрическое поле с одного из электродов будет происходить инжекция зарядов одного знака с последующим захватом их нейтральными молекулами и разрядкой на противоположном электроде. При этом плотность тока в жидкости равна

$$\vec{j}_1 = b_1 q_1 \vec{E},$$

b_1 - подвижность иона, q_1 - плотность инжектированного заряда. В стационарном режиме в плоскопараллельной ячейке имеем

$$j_z = b_1 q_1 E_z = \text{const} = j_1, \quad \frac{dE_z}{dz} = q_1 / \epsilon \epsilon_0. \quad (5.8)$$

Совместное решение этих уравнений дает следующее распределение поля и заряда в жидкости:

$$E_z = \sqrt{C_1 + \frac{2j_1 z}{b_1 \epsilon \epsilon_0}}, \quad q_1 = \frac{j_1}{b_1 \sqrt{C_1 + \frac{2j_1 z}{b_1 \epsilon \epsilon_0}}}. \quad (5.9)$$

Постоянная интегрирования C_1 определяется из условий для поля (потенциала) на границах слоя.

Рассмотрим случай слабой инжекции. Слабая инжекция означает

$$J = \frac{j_1 h}{\epsilon_0 \epsilon b_1 C_1} \ll 1$$

или так как $C_1^{1/2}$ имеет смысл напряженности поля в слое в отсутствие инжекции, то можно записать

$$C_1^{1/2} = E_{00} = \frac{\delta\phi}{2h}.$$

В первом приближении по малому параметру инжекции J получаем

$$E_z = E_{00}(1 + 2Jz), \quad q_1 = J \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_{00}}{h}. \quad (5.10)$$

В случае сильной инжекции на инжектирующем электроде имеем [64]

$$j_1 = \text{const}, \quad E_z(z=0) = 0, \quad q_1(z=0) \rightarrow \infty.$$

Тогда решение имеет вид

$$E_z = \left(\frac{2j_1}{\varepsilon_0 \varepsilon b_1} \right)^{1/2} z^{1/2}, \quad q_1 = \frac{j_1}{b_1 E_z(z)}. \quad (5.11)$$

Видно, что закон Ома, т.е. пропорциональность j и E не выполняется и ток зависит от напряжения по квадратичному закону (при инжекции электронов в вакуум имеем закон Чайльда $3/2$ [108]). Как показано выше, в случае же слабой инжекции закон Ома выполняется, но приближенно. Ток в рассмотренном режиме носит название тока, ограниченного пространственным зарядом (ТОПЗ).

В случае неравномерной биполярной инжекции с обоих электродов ситуация совершенно аналогична. В стационарном режиме имеем (см., например, [63])

$$j_1 = b_1 q_1 E, \quad j_2 = -b_2 q_2 E, \quad \frac{dE}{dz} = (q_1 + q_2) / \varepsilon_0 \varepsilon, \quad \rho = q_1 + q_2. \quad (5.12)$$

(здесь и далее считается $q_1 > 0$, $q_2 < 0$, $b_{1,2} > 0$). Отсюда находим:

$$E = \sqrt{C_1 + \frac{2D_{12}z}{\varepsilon_0 \varepsilon}}, \quad \rho = \frac{D_{12}}{\varepsilon_0 \varepsilon \sqrt{C_1 + \frac{2D_{12}z}{\varepsilon_0 \varepsilon}}}, \quad D_{12} = \frac{j_1 b_2 - j_2 b_1}{b_1 b_2}. \quad (5.13)$$

Структура полученного решения совпадает с (5.9) с заменой j_1 / b_1 на D_{12} .

Перейдем к рассмотрению омической модели проводимости.

Допустим, что в жидкости в достаточном количестве имеется примесь, способная диссоциировать на ионы. В отсутствие тока изменение числа ионов в объеме со временем, в предположении парной рекомбинации, дается уравнением [26, 31, 127]

$$\frac{dn_+}{dt} = n_0(1 - \alpha)K_D - K_R n_+ n_- ,$$

n_0 - плотность нейтральной примеси, α - степень ионизации примеси, K_D , K_R - константы диссоциации и рекомбинации. В равновесии

$$\frac{K_D}{K_R} = \frac{n_+ n_-}{n_0(1 - \alpha)} . \quad (5.14)$$

Или используя условие нейтральности $n_+ = n_- = \alpha n_0$, имеем

$$\frac{K_D}{K_R} = \frac{n_0 \alpha^2}{(1 - \alpha)} = K_u , \quad (5.15)$$

K_u - константа ионизации. При прохождении тока в стационарных условиях можно записать

$$\text{div} \vec{j} = e_+ n_0 K_D - e_+ K_R n_+ n_- , \quad \alpha \ll 1 ,$$

$$\vec{j} = e_+ (n_+ b_+ + n_- b_-) \vec{E} .$$

e_+ - заряд положительного иона. В предельном случае достаточно больших объемов и малых токах имеем квазиравновесное состояние (5.14), то есть

$$j = 2(b_+ + b_-)n_+ E .$$

Используя (5.14) и (5.15), получаем

$$j = 2e_+ (b_+ + b_-) \sqrt{\frac{K_D n_0}{K_R}} \cdot E = \sigma_0 E , \quad \sigma_0 = 2e_+ \sqrt{K_u n_0} (b_+ + b_-) .$$

Здесь σ_0 имеет смысл собственной электропроводности жидкости. Как указано в [31], понятие собственной электропроводности (5.16) можно ввести в случае "слабых" ($E < 10$ кВ/см) полей и малого времени ланжевеновской химической

релаксации по сравнению с транзитным временем прохода ионов между электродами

$$\tau_{mp} = \frac{2h}{bE} \gg \tau_p = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{K_D K_R n_0}}. \quad (5.17)$$

Учитывая изложенное, сформулируем условия, при которых процессы диссоциации-рекомбинации можно считать равновесными и имеет смысл понятие собственной электропроводности жидкости:

- а) наличие диссоциирующей примеси;
- б) "малые" подвижности ионов, "малые" поля;
- в) "большие" объемы жидкости (по оценкам, приведенным в [31], например, расстояние между электродами $h \gg 10$ мкм);

г) достаточно малое время ланжевеновской химической релаксации.

Вообще говоря, к этим условиям необходимо добавить еще условие малости объемного нескомпенсированного заряда в жидкости по сравнению с фоновым, то есть

$$д) q_0 = 2e_+ \sqrt{K_u n_0} \gg |\rho|.$$

В дальнейшем, во всех рассматриваемых в этой главе задачах условия а)-д) будут предполагаться выполненными.

5.1.3. Условия равновесия и принцип монотонности возмущений

При наличии объемного заряда в жидкости в электрическом поле на нее действуют пондеромоторные силы, способные привести жидкость в движение. Однако, в некоторых условиях возможно равновесие и тогда можно рассматривать задачу об его устойчивости.

Полагая в уравнении Навье-Стокса (5.6) $\vec{v} = 0$ и взяв операцию rot от правой его части, получим условия равновесия (пока учитываем только силы электрического происхождения, то есть считаем $g = 0$)

$$\nabla \rho_0 \times \vec{E} = 0, \quad \text{div} \vec{E}_0 = \rho_0 / \varepsilon_0 \varepsilon, \quad \vec{E} = \vec{E}_{00} + \vec{E}_0, \quad \text{div} \vec{E}_{00} = 0. \quad (5.18)$$

Здесь \vec{E}_{00} - поле, созданное внешними по отношению к жидкости зарядами.

Считая $\varepsilon = \text{const}$, запишем условие равновесия в виде

$$\nabla \rho_0 \times \vec{E}_0 + \nabla \rho_0 \times \vec{E}_{00} = 0. \quad (5.19)$$

Первое слагаемое в (5.19), с учетом $\vec{E}_0 = -\nabla \varphi$, всегда равно нулю, так как

$$\nabla \rho_0 = -\nabla^2 (\nabla \varphi) = \varepsilon_0 \varepsilon \Delta \vec{E}_0.$$

При специальном выборе электродов второе слагаемое также может равняться нулю. (Например, в плоском, цилиндрическом, сферическом конденсаторах). Равновесие, однако, может оказаться неустойчивым, в результате возникает гидродинамическое движение, то есть электроконвекция.

Рассмотрим весьма важный предельный случай конвекции с "вмороженным" зарядом.

Допустим, что при движении элемент жидкости, пройдя расстояние, равное характерному размеру объема, занятого жидкостью, практически не теряет своего заряда. Это возможно, если время релаксации заряда $\tau = \varepsilon_0 \varepsilon / \sigma$ больше характерного гидродинамического времени $t_* \sim Z / v_*$ (Z - характерный размер), то есть

$$\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma} > \frac{Z}{v_*} \quad (5.20)$$

(σ - не обязательно собственная электропроводность). Оценивая скорость из

уравнения Навье-Стокса с учетом только кулоновских сил: $v_* \sim \frac{\rho E Z^2}{\eta}$ и полагая

$\rho \sim \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E}{Z}$, вместо (5.20) получим

$$B = \frac{\varepsilon^2 \varepsilon_0^2 E^2}{\eta \sigma} > 1. \quad (5.21)$$

В работе [128] экспериментально найдено, что в слабопроводящих жидкостях почти сразу после потери устойчивости и начала движения конвективный перенос заряда превышает ток проводимости. Действительно, выбирая

параметры, характерные для электрогидродинамики слабопроводящих жидкостей: $E \sim 1 \text{ кВ/см}$, $\eta \sim 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$, $\sigma \sim 10^{-12} \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$, $\varepsilon \sim 1$, получим оценку $B \sim 10 > 1$.

Таким образом, приближение конвекции с "вмороженным" зарядом можно считать достаточно обоснованным для указанных случаев и использовать его при решении некоторых задач ЭГД.

Рассмотрим, например, возникновение ЭГД неустойчивости в случае полностью "вмороженного" заряда. Пренебрегая вязкостью и другими диссипативными механизмами, для малых возмущений равновесия в безындукционном приближении можем записать

$$\gamma \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p + \rho \vec{E}_0, \quad \text{div} \vec{v} = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho_0 = 0. \quad (5.22)$$

Пусть $\vec{\xi}$ - малое смещение произвольного элемента объема от положения равновесия. Тогда

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{\xi} = 0.$$

Исключив \vec{v} в уравнениях (5.22), получим

$$\frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = -\frac{\nabla p}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \rho \vec{E}_0, \quad \rho = -\vec{\xi} \nabla \rho_0.$$

Исключим ρ из первого уравнения, умножим его на $\vec{\xi}$ и проинтегрируем полученное равенство по всему объему. Тогда будем иметь

$$\int_V \vec{\xi} \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} dV = -\frac{1}{\gamma} \oint_{\Sigma} \xi_n p dS - \frac{1}{\gamma} \int_V (\vec{\xi} \nabla \rho_0) (\vec{\xi} \vec{E}_0) dV.$$

Первый интеграл в правой части при условии непроницаемости стенок сосуда равен нулю. Полагая $\vec{\xi} \sim e^{i\omega t}$, найдем

$$\omega^2 = \frac{\int_V \left(\vec{\xi} \nabla \rho_0 \right) \left(\vec{\xi} \vec{E}_0 \right) dV}{\int_V \left| \vec{\xi} \right|^2 dV}. \quad (5.23)$$

Неустойчивость, то есть монотонное нарастание смещения $\vec{\xi}$ возможно, если $\omega^2 < 0$, то есть при

$$\vec{E}_0 \nabla \rho_0 < 0 \quad (5.24)$$

Другими словами, для того, чтобы равновесие было неустойчиво по отношению к монотонным возмущениям, необходимо, чтобы возле электродов накапливались гомозаряды, уменьшающиеся по величине по мере удаления от электрода. С физической точки зрения это совершенно понятно. На элемент жидкости 1 объема dV , сместившийся в направлении поля в положение 2, будет действовать сила

$$\mathcal{F}_{12} = \rho_1(1) E(2) dV.$$

На вытесненный при этом элемент 2 в положении 2 действовала сила

$$\mathcal{F}_{22} = \rho_2(2) E(2) dV.$$

Коль скоро плотность заряда уменьшается в направлении поля

$$\rho_1(1) > \rho_2(2), \text{ то } \mathcal{F}_{12} > \mathcal{F}_{22}$$

и элемент 1 имеет тенденцию смещаться дальше. То есть условие (5.24) - необходимое условие неустойчивости по отношению к монотонным возмущениям. Это условие заведомо выполняется при образовании объемного заряда в рамках инжекционного механизма проводимости.

По поводу полученного условия отметим еще следующее.

В работе [129] это условие рассматривается как необходимое условие неустойчивости равновесия жидкости в электрическом поле вообще. В работе [39] обратное (5.24) условие рассматривается как достаточное для устойчивости равновесия. Однако заметим, что:

во-первых, нарушение условия (5.24) приводит к тому, что на элемент жидкости действует возвращающая сила и он начинает совершать колебания. Эти колебания могут оказаться нарастающими и тогда равновесие неустойчиво по отношению к колебательным возмущениям (см. гл.1);

во-вторых, в рамках модели ЭГД, в которой учитываются термоэлектрические токи, условие (5.24) вообще оказывается не связанным с утверждением об устойчивости или неустойчивости равновесия (см. гл. 6).

Поэтому будем рассматривать условие (5.24) только как необходимое условие неустойчивости равновесия по отношению к монотонным возмущениям в рамках омической модели проводимости.

Рассмотрим выполнение условия (5.24) в рамках омической модели проводимости, считая электропроводность зависящей от температуры. Допустим, что жидкость в плоском конденсаторе находится в равновесии. При этом

$$T = T_0 - Az, \quad \frac{dE_0}{dz} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad \frac{d}{dz}(\sigma(T_0)E_0) = 0.$$

Ось z направлена перпендикулярно пластинам.

Вычисляя ρ_0 и $\frac{d\rho_0}{dz}$, найдем

$$\rho_0 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon j_0 A}{\sigma^2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right), \quad \frac{d\rho_0}{dz} = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon j_0 A^2}{\sigma^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2} \right) - \frac{2}{\sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)^2 \right]. \quad (5.25)$$

Необходимое условие неустойчивости по отношению к монотонным возмущениям оказывается выполненным, если зависимость $\sigma(T)$ такова, что

$$s = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2} - \frac{2}{\sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)^2 > 0. \quad (5.26)$$

Для экспериментально подтвержденных зависимостей $\sigma(T)$ Френкеля и Адамчевского [130]

$$\sigma_{\Phi}(T) = \frac{A_1}{T} e^{-\frac{A_2}{T}}, \quad \sigma_A = \frac{A'_1}{T^{3/2}} e^{-\frac{A_2}{T}} \quad (5.27)$$

непосредственным вычислением (5.26) находим $s < 0$.

Таким образом, в рамках омической модели проводимости в плоском конденсаторе возможна неустойчивость только по отношению к колебательным возмущениям (см. следующий раздел).

В работе [75] зависимость $\sigma(T)$ аппроксимировалась полиномом второй степени:

$$\sigma(T) = \sigma_0 \left(1 + s_1 (T - T_{00}) + s_2 (T - T_{00})^2 \right), \quad (5.28)$$

$$s_1, s_2 > 0, \quad s_1 |T - T_{00}| \sim s_2 |T - T_{00}|^2 \ll 1.$$

T_{00} - некоторая средняя температура. Было получено, что равновесие плоского слоя жидкости в электрическом поле неустойчиво по отношению к монотонным возмущениям. Действительно, аппроксимация (5.28) обеспечивает выполнение необходимого условия (5.24). Однако, если ее рассматривать как представляющую первые члены разложения соотношений (5.27), то коэффициенты s_1 и s_2 оказываются связанными так, что условие (5.24) уже не выполняется. Поэтому вывод о существовании монотонной неустойчивости в рамках омической модели, полученный в [75], является необоснованным.

Далее в этой главе будем использовать линейную аппроксимацию зависимости электропроводности от температуры, считая ее достаточной для получения основных результатов.

Иначе дело обстоит в цилиндрическом и сферическом конденсаторах. Равновесные распределения температуры в цилиндрическом и сферическом конденсаторах, соответственно, имеют вид

$$T_0 = \frac{T_2 - T_1}{\ln(r_2 / r_1)} \ln r - \frac{T_2 \ln r_1 - T_1 \ln r_2}{\ln(r_2 / r_1)},$$

$$T_0 = \frac{(T_1 - T_2)r_1 r_2}{r(r_2 - r_1)} + \frac{T_2 r_2 - T_1 r_1}{r_2 - r_1}.$$

Здесь индексом 1 обозначены величины, относящиеся к внутреннему электроду, 2 - к внешнему. Для градиента равновесного заряда в том и другом случае соответственно получим

$$\frac{d\rho_0}{dr} = \frac{c_1}{r\sigma^2} \left\{ \left(\frac{\partial\sigma}{\partial T} \right) \frac{2(T_2 - T_1)}{r^2 \ln(r_2 / r_1)} + \left(\frac{\partial T_0}{\partial r} \right)^2 \left(\frac{2}{\sigma} \left(\frac{\partial\sigma}{\partial T} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial T^2} \right) \right) \right\},$$

$$\frac{d\rho_0}{dr} = \frac{c_2}{r^2\sigma^2} \left\{ \left(\frac{\partial\sigma}{\partial T} \right) \frac{4(T_2 - T_1)r_1r_2}{r^3(r_2^2 - r_1^2)} + \left(\frac{\partial T_0}{\partial r} \right)^2 \left(\frac{2}{\sigma} \left(\frac{\partial\sigma}{\partial T} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial T^2} \right) \right) \right\}.$$

Здесь c_1 и c_2 - постоянные интегрирования, причем $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, если на внутреннем электроде положительный заряд. Оценки слагаемых, входящих в фигурные скобки, показывают, что слагаемые, пропорциональные $\left(\frac{\partial\sigma}{\partial T} \right)$, всегда больше слагаемых, пропорциональных $\left(\frac{\partial T_0}{\partial r} \right)^2$. Они становятся одного порядка только при $r_2 \sim r_1$, что, в сущности, означает переход к плоской геометрии задачи. Поэтому знак $\frac{d\rho_0}{dr}$ (а следовательно и $E_0 \left(\frac{d\rho_0}{dr} \right)$, поскольку E_0 предполагается положительным) определяется разностью $(T_2 - T_1)$. При $T_1 > T_2$ внутренний электрод имеет большую температуру, необходимое условие неустойчивости по отношению к монотонным возмущениям выполняется, так, что она становится возможной [129, 76].

5.1.4. Безындукционное приближение ЭГД

Во многих практически интересных задачах магнитной гидродинамики используется безындукционное приближение, в котором пренебрегается индуцированным магнитным полем токов по сравнению с внешним полем [131, 132].

В задачах электрогидродинамики встречается аналогичное приближение, в котором пренебрегается электрическим полем индуцированного в объеме

жидкости заряда по сравнению с внешним полем (оно также может быть названо безындукционным).

Проанализируем условия, при которых справедливо безындукционное приближение ЭГД. Рассмотрим также некоторые конкретные случаи применимости этого приближения [155].

Предположим, что вязкая несжимаемая слабопроводящая жидкость находится во внешнем постоянном электрическом поле. Будем считать жидкость неоднородной по электропроводности. Эта неоднородность может быть обусловлена различными причинами. Например, зависимостью электропроводности от температуры, напряженности поля, инжекцией зарядов с электродов и т.д. При написании уравнений ЭГД будем учитывать только кулоновские силы.

Рассмотрим сначала случай собственной электропроводности (инжекции нет). Удобно записать уравнения в безразмерной форме, выбрав в качестве единиц измерения длины - L (характерный размер области), времени - L^2 / ν , скорости - ν/L , поля - E_{00} (E_{00} - напряженность поля, создаваемая внешними, по отношению к жидкости, зарядами, по условию в объеме $\text{div} \vec{E}_{00} = 0$) и заряда - $\frac{\epsilon_0 \epsilon E_{00}}{L}$. Единицы измерения подбираются так, чтобы коэффициент при ∇p был равен единице. В безразмерной форме система уравнений ЭГД запишется так

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= -\nabla p + \Delta \vec{v} + B \rho \vec{e}, & P_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho \right) &= -\lambda \rho - \vec{e} \nabla \lambda, \\ \text{div} \vec{e} &= \rho, \quad \text{rot} \vec{e} = 0, \quad \text{div} \vec{v} = 0, \\ \vec{e} &= \frac{\vec{E}}{E_{00}}, \quad B = \frac{\epsilon_0 \epsilon E_{00} L^2}{\nu \eta}, \quad P_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon \nu}{\sigma_0 L^2}, \quad \lambda(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r})}{\sigma_0}, \end{aligned} \quad (5.29)$$

где σ_0 - некоторое среднее значение электропроводности. Пусть распределение электропроводности всюду мало отличается от среднего значения на величину $\sigma'(\vec{r})$. Тогда для $\lambda(\vec{r})$ получаем

$$\lambda(\vec{r}) = 1 + Sf(\vec{z}), \quad f(\vec{r}) = \frac{\sigma'(\vec{r})}{\max|\sigma'(\vec{r})|}, \quad S = \frac{\max|\sigma'(\vec{r})|}{\sigma_0} \ll 1. \quad (5.30)$$

Теперь система уравнений (5.29), (5.30) содержит малый параметр S , имеющий смысл максимальной величины относительной неоднородности электропроводности. Решение системы можно отыскать в виде рядов по малому параметру S . В нулевом приближении закон сохранения заряда дает

$$P_1 \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho_0 \right) + \rho_0 = 0.$$

Интегрируя полученное равенство по всему объему жидкости, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_0 dV + \oint_{\Sigma} v_n \rho_0 ds + \frac{1}{P_1} \int_V \rho_0 dV = 0.$$

При условии непроницаемости стенок сосуда $v_n = 0$ и второй интеграл обращается в нуль. Из оставшегося соотношения следует, что в стационарном режиме $\rho_0 = 0$. Таким образом, разложение электрических величин в ряд по S можно записать в виде

$$\rho = S\rho_1 + S^2\rho_2 + S^3\rho_3 + \dots, \quad \vec{e} = \vec{e}_0 + S\vec{e}_1 + S^2\vec{e}_2 + S^3\vec{e}_3 + \dots. \quad (5.31)$$

Подставляя (5.31) в систему (5.29) и сохраняя лишь члены первого порядка малости по S , получим

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \Delta \vec{v} + BS\rho_1 \vec{e}_0, \quad (5.32)$$

$$P_1 \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho_1 \right) + \rho_1 + \vec{e}_0 \nabla f_1 = 0, \quad \text{div} \vec{v} = 0. \quad (5.33)$$

$$\text{div} \vec{e}_1 = \rho_1, \quad \text{rot} \vec{e}_1 = 0.$$

Замечательной особенностью системы (5.32), (5.33) является то обстоятельство, что она замкнута и не содержит поля индуцированного заряда. (Система замкнута при заданной $f_1(\vec{r})$, в противном случае к ней необходимо добавить уравнение для определения $f_1(\vec{r})$. Таковым может быть, например, уравнение теплопроводности). Решение системы (5.32), (5.33) при заданных

начальных и граничных условиях определяет движение жидкости, обусловленное взаимодействием внешнего поля и индуцированного заряда. Фактически это и составляет суть безындукционного приближения ЭГД, использовавшегося, без достаточного обоснования, например, в работах [3, 60, 61, 63, 72-76, 129].

Рассмотрим конкретные примеры.

В неизотермических задачах ЭГД неоднородность электропроводности обусловлена неоднородностью температуры, поэтому в качестве параметра S можно выбрать

$$S = \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \delta T = \beta_\sigma \delta T ,$$

δT - характерный перепад температуры. Для применимости безындукционного приближения необходима достаточная малость величины S , то есть слабая зависимость σ от температуры.

В работах [59-61] предполагается, что электропроводность жидкости зависит от величины напряженности внешнего поля, то есть

$$\sigma = \sigma_0 \Phi(E_{00}) .$$

В этом случае безындукционное приближение применимо, если:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial E_{00}} \right) \cdot |\nabla E_{00}| L \ll 1 .$$

Наконец, в задачах ЭГД, в которых объемный заряд создается вследствие униполярной инжекции зарядов с одного из электродов [63-67], безындукционное приближение предполагает слабую инжекцию. Если пренебречь собственной проводимостью жидкости, то система уравнений в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= -\nabla p + \Delta \vec{v} + B S \rho \vec{e} , \\ P_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho \right) &= -S \rho^2 - \vec{e} \nabla \rho , \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{e} = S \rho, \quad \operatorname{rot} \vec{e} = 0, \quad P_1 = \frac{v}{bE_{00}L}.$$

Единицы измерения прежние, кроме единицы измерения заряда. Она выбирается исходя из условий на инжектирующем электроде. В частности, если задана плотность инжекционного тока J_0 , то $[\rho] = J_0 L / bE_{00}$. Если же задана плотность заряда q_0 , тогда $[\rho] = q_0$. В каждом из приведенных случаев соответственно

$$S = \frac{J_0 L}{b\epsilon_0 \epsilon E_{00}}, \quad S = \frac{q_0 L}{\epsilon_0 \epsilon E_{00}}.$$

Слабая инжекция означает $S \ll 1$. Для получения уравнений в безындукционном приближении подставим разложение (5.31) в (5.34). Тогда в первом порядке приближения по S получим:

$$P_1 \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho_1 \right) + \vec{e}_0 \nabla \rho_1 = 0, \quad \operatorname{div} \vec{e}_1 = 0. \quad (5.35)$$

Во втором порядке приближения система (5.34) дает

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \Delta \vec{v} + BS^2 \rho_1 \vec{e}_0, \quad \operatorname{div} \vec{e}_2 = \rho_1, \quad \rho_2 = 0. \quad (5.36)$$

Таким образом, для определения поля скоростей из уравнения Навье-Стокса (5.36) необходимо решить его совместно с уравнением закона сохранения заряда (5.35). Оба уравнения не содержат поля индуцированного заряда, то есть записаны в безындукционном приближении.

Заметим, однако, что во многих задачах с униполярной инжекцией последняя предполагается сильной и безындукционное приближение неприменимо. Оно также неприменимо в том случае, когда рассматривается взаимодействие объемного заряда с собственным полем (см. гл. 6).

5.1.5. Вывод уравнений электроконвекции для омической модели проводимости

Далее будут рассмотрены задачи об устойчивости равновесия плоских слоев неравномерно нагретой слабопроводящей жидкости, помещенной во внешнее

постоянное электрическое поле и находящейся в поле тяжести. При этом используется омическая модель проводимости. Собственная электропроводность жидкости предполагается в пределах $10^{-10} \geq \sigma_0 \geq 10^{-12} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$. Дадим обоснование омической модели проводимости жидкости.

Запишем основные уравнения, сохраняя предположения, в которых выше записаны уравнения Навье-Стокса и теплопроводности (5.6). В уравнениях законов сохранения зарядов пренебрежем термодиффузионными токами по сравнению с токами проводимости, а процессы диссоциации - рекомбинации будем считать квазиравновесными.

Выведем уравнение закона сохранения избыточного заряда в случае двух типов носителей тока противоположных знаков. С учетом диффузии зарядов, используя (5.6), для положительных и отрицательных зарядов имеем законы сохранения

$$\frac{dq_1}{dt} = D_1 \Delta q_1 - \text{div}(b_1 q_1 \vec{E}), \quad \frac{dq_2}{dt} = D_2 \Delta q_2 + \text{div}(b_2 q_2 \vec{E}). \quad (5.37)$$

Пусть, как и прежде, в жидкости имеется избыточный заряд (для определенности положительный), плотность которого ρ много меньше фоновой, которая определяется собственной электропроводностью жидкости

$$\rho = q_1 + q_2, \quad \rho \ll \min(q_1, |q_2|).$$

В дальнейшем условно будем считать $q_1 > |q_2|$. Суммируя уравнения (5.37), после несложных преобразований получим

$$\frac{d\rho}{dt} = (D_2 - D_1) \Delta q_2 + D_1 \Delta \rho - \text{div}(b_1 \rho \vec{E} - q_2 (b_1 + b_2) \vec{E}). \quad (5.38)$$

Предположим, что $D_1 \approx D_2 = D$ и $b_1 \approx b_2 = b$ (здесь это приемлемые приближения). Тогда будем иметь

$$\frac{d\rho}{dt} = D \Delta \rho - \text{div}(b \rho \vec{E} + \sigma \vec{E}), \quad \sigma = 2b|q_2|.$$

σ - собственная электропроводность жидкости. Пренебрегая вкладом избыточного заряда ρ в электропроводность, получим

$$\frac{d\rho}{dt} = D\Delta\rho - \operatorname{div}(\sigma\vec{E}), \quad \frac{dq_0}{dt} = D\Delta q_0, \quad q_0 \approx |q_2| = e_+ \sqrt{K_u n_0}.$$

Из полученных уравнений видно, что выравнивание концентрации фонового заряда q_0 происходит по законам диффузии за характерное время h^2/D , тогда как свободный заряд еще и релаксирует за время $\varepsilon_0 \varepsilon / \sigma$. Обычно время молекулярной диффузии намного превышает время релаксации заряда даже в слабопроводящих жидкостях, поэтому в течение характерного времени $\varepsilon_0 \varepsilon / \sigma$ проводимость жидкого элемента можно считать функцией термодинамического состояния среды, например, температуры, давления и электрического поля. Закон сохранения избыточного заряда при этом имеет простой вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho = -\operatorname{div}(\sigma \vec{E}), \quad \sigma = \sigma(T, p, E). \quad (5.39)$$

В равновесии $\vec{v} = 0$, $\partial/\partial t = 0$ и плотность объемного заряда определяется в данном случае уравнениями

$$\frac{d(\sigma E_0)}{dz} = 0, \quad \frac{d(\varepsilon E_0)}{dz} = \rho_0 / \varepsilon_0.$$

Решая их совместно, найдем

$$\rho_0 = \varepsilon_0 j_0 \frac{d}{dz} \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \right).$$

Этот заряд аналогичен поверхностному заряду, который аккумулируется на границе раздела двух разных проводников с проводимостями σ_1 и σ_2 и равен (см. раздел 1.1)

$$Q_0 = \varepsilon_0 j_{\text{эф}} \left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} \right), \quad j_{\text{эф}} = \frac{\delta \varphi \sigma_1 \sigma_2}{h_1 \sigma_2 + h_2 \sigma_1}.$$

Таким образом, в рамках принятых предположений и в рамках омической модели проводимости жидкости окончательную систему уравнений можно записать в виде

$$\gamma_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} - \gamma_0 \beta T \vec{g} + \rho \vec{E},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \nabla T = \chi \Delta T, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho = -\operatorname{div}(\sigma \vec{E}), \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \sigma = \sigma(T, p, E).$$

5.2. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО СЛОЯ СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В теории обычной конвекции наиболее простое и наглядное решение можно получить аналитически в задаче Рэлея-Бенара об устойчивости равновесия горизонтального слоя со свободными границами [125].

В случае конвекции в электрическом поле аналогичной модельной задачей, допускающей точное решение, является задача об устойчивости равновесия вертикального слоя жидкости [152, 153].

Рассмотрим плоский вертикальный слой жидкости, помещенный во внешнее электрическое поле и подогреваемый снизу или сверху. Электропроводность жидкости будем считать линейной функцией температуры. Условие равновесия слоя можно получить, положив в (5.40) $\vec{v} = 0$ и $\partial/\partial t = 0$. Тогда, после применения операции rot к уравнению Навье-Стокса, получим

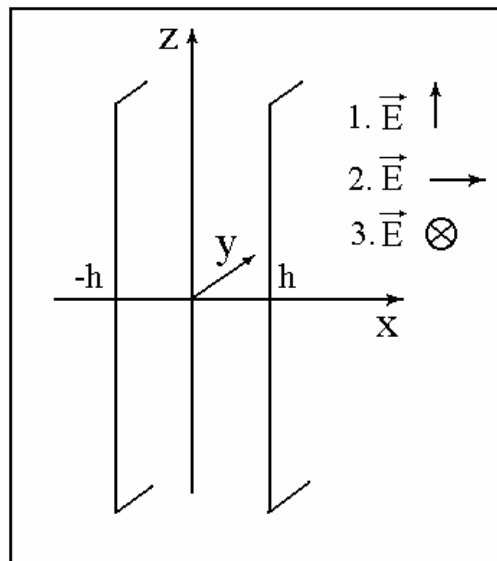


Рис. 5.1. Плоский вертикальный слой жидкости. Расположение осей координат и направление электрического поля

$$\vec{E}_0 \times \nabla \rho_0 - \vec{g} \times \nabla T_0 = 0.$$

Это условие может быть выполнено в двух случаях

$$\vec{E}_0 \parallel \nabla T_0 \parallel \vec{g}, \quad (5.41.1)$$

$$\vec{E}_0 \perp \nabla T_0 \parallel \vec{g}. \quad (5.41.2)$$

При выполнении условия (5.41.1) равновесие характеризуется следующим распределением равновесных величин (ось z направлена вертикально вверх, рис.5.1):

$$T_0 = T_{00} - Az, \quad \sigma = \sigma_0(1 + \beta_\sigma(T - T_{00})),$$

$$E_0 = E_{00}(1 + \beta_\sigma Az), \quad \rho_0 = \varepsilon_0 \varepsilon E_{00} \beta_\sigma A, \quad \frac{d\rho_0}{dz} = \gamma_0 g \beta T_0 + \rho_0 E_0.$$

При выполнении условия (6.41.2) в равновесии имеем

$$T_0 = T_{00} - Az, \quad E_0 = E_{00} = \text{const}, \quad \rho_0 = 0, \quad \frac{dp_0}{dz} = \gamma_0 g \beta T_0.$$

Рассмотрим теперь поведение малых возмущений. Для этого линеаризуем систему (5.40) по малым возмущениям и введем безразмерные переменные. В качестве единиц измерения выберем: расстояния - h - полуширина слоя; поля - E_{00} ; времени - h^2 / ν ; скорости - χ/h ; возмущений температуры - Ah ; давления - $\gamma_0 \nu \chi/h$; заряда - $\varepsilon_0 \varepsilon \beta_\sigma A E_{00}$. Тогда в безындукционном ЭГД приближении получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -\nabla p + \Delta \vec{v} + RT \vec{e}_1 + RB \rho \vec{e}_0, & P \frac{\partial T}{\partial t} - v_z &= \Delta T, \\ P_e \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho &= -\vec{e}_0 \nabla T, & \text{div} \vec{v} &= 0, \quad \text{div} \vec{e} = S \rho, \quad \text{rot} \vec{e} = 0, \\ R &= \frac{g \beta A h^4}{\nu \chi}, & B &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_{00}^2 \beta_\sigma}{\gamma_0 g \beta h}, & P &= \frac{\nu}{\chi}, & P_e &= \frac{\nu \varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma_0 h^2}, & S &= \beta_\sigma |A| h. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Здесь \vec{e}_1 - единичный вектор, направленный вертикально вверх, \vec{e}_0 - единичный вектор в направлении равновесного поля.

Для простоты рассмотрим слой со свободными теплоизолированными границами. Параллельно будем рассматривать три случая направления поля, при которых, согласно (5.41.1) и (5.41.2), равновесие возможно (рис.5.1):

- 1) поле параллельно оси z (вертикально);
- 2) поле параллельно оси x (горизонтально);
- 3) поле параллельно оси y (горизонтально).

Возмущения будем считать нормальными, периодическими в плоскости слоя

$$w' = w(x) \exp\{-\lambda t + ik_y y + ik_z z\} \quad (5.43)$$

Подставим (5.43) в уравнения системы (5.42), дважды применим операцию rot к первому уравнению этой системы и спроецируем полученное уравнение на оси x и z . В каждом из трех случаев это дает

$$\begin{cases} \hat{L}_1[v_x, T] = -ik_z BRD_x \rho, \\ \hat{L}_2[v_z, T] = BRD_x^2 \rho - BRk_y^2 \rho; \end{cases} \quad (5.44.1)$$

$$\begin{cases} \hat{L}_1[v_x, T] = BRk^2 \rho, \\ \hat{L}_2[v_z, T] = -ik_z BRD_x \rho; \end{cases} \quad (5.44.2)$$

$$\begin{cases} \hat{L}_1[v_x, T] = -ik_y BRD_x \rho, \\ \hat{L}_2[v_z, T] = k_y k_z \rho. \end{cases} \quad (5.44.3)$$

Здесь введены следующие операторы и обозначения:

$$\hat{L}_1[v_x, T] = -\lambda(D_x^2 - k^2)v_x - (D_x^2 - k^2)v_x + ik_z RD_x T,$$

$$\hat{L}_2[v_z, T] = -\lambda(D_x^2 - k^2)v_z - (D_x^2 - k^2)v_z + ik_y RD_x T,$$

$$k^2 = k_y^2 + k_z^2, \quad D_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}.$$

Во всех уравнениях y -компонента скорости исключена при помощи условия непрерывности

$$D_x v_x + ik_y v_y + ik_z v_z = 0. \quad (5.45)$$

Уравнения теплопроводности, Пуассона и условие потенциальности поля во всех трех случаях имеют вид

$$-\lambda PT = v_z + (D_x^2 - k^2)T, \quad (5.46)$$

$$D_x e_x + ik_y e_y + ik_z e_z = S\rho,$$

$$D_x e_z = ik_z e_x, \quad D e_y = ik_y e_x, \quad k_y e_z = k_z e_y. \quad (5.47)$$

Закон сохранения заряда приводит к следующим уравнениям:

$$(-\lambda P_1 + 1)\rho = \begin{cases} -ik_z T, & (5.48.1) \\ -D_x T, & (5.48.2) \\ -ik_y T. & (5.48.3) \end{cases}$$

К полученным уравнениям (5.44) и (5.48), вообще говоря, следует добавить уравнения для электрического поля в окружающем слой пространстве. Однако, как будет показано ниже, для анализа устойчивости эти уравнения не понадобятся.

Как уже говорилось, вертикальные границы слоя будем считать свободными, недеформируемыми и теплоизолированными. Имея в виду дальнейшие преобразования, запишем граничные условия в размерной форме. Условия недеформируемости и теплоизоляции дают

$$v_x = 0, \quad D_x T = 0, \quad x = \pm h. \quad (5.49)$$

На свободных границах должно выполняться условие баланса всех сил

$$n_k (T_{ik} - T_{ik}^{(m)}) = 0, \quad T_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \varepsilon_0 \varepsilon \left(E_i E_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} E^2 \right). \quad (5.50)$$

Здесь n_k - единичный вектор, T_{ik} , $T_{ik}^{(m)}$ - тензоры вязких и максвелловских напряжений в жидкости и окружающем пространстве (массиве), индекс m относится к массиву.

Рассмотрим первый вариант задачи - случай вертикально направленного поля. Учитывая предположение о свободных и недеформируемых границах,

спроецируем уравнение (5.50) на оси z и y и линеаризуем полученные уравнения по возмущениям. Это дает

$$\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = -\varepsilon_0 E_0 (\varepsilon e_x - \varepsilon_m e_{xm}), \quad (5.51)$$

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = 0, \quad x = \pm h. \quad (5.52)$$

К полученным условиям (5.49), (5.51), (5.52) следует добавить условия непрерывности нормальной к границе компоненты тока и касательной компоненты поля

$$(\sigma e_x - \sigma_m e_{xm}) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon e_x - \varepsilon_m e_{xm}) = 0, \quad e_z = e_{zm}, \quad x = \pm h. \quad (5.53)$$

С целью разделить гидродинамическую и электрическую части задачи исключим поле из граничного условия (5.51). Из граничного условия для теплопотока (5.49) и уравнения (5.48.1) найдем на границах

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = \pm h. \quad (5.54)$$

Последнее соотношение с учетом уравнений (5.47) дает

$$\Delta e_x = 0 \quad \text{при } x = \pm h, \quad \Delta = D_x^2 - k^2 - \text{оператор Лапласа.}$$

В свою очередь, из (5.53) следует, что $\Delta e_{xm} = 0$ при $x = \pm h$. Применив оператор Δ к уравнению (5.51), получим

$$\Delta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{при } x = \pm h. \quad (5.55)$$

Гидродинамическая часть задачи, определенная уравнениями (5.44.1), (5.45), (5.46), (5.48.1) и граничными условиями (5.49), (5.52), (5.55), теперь не содержат возмущений поля и может быть рассмотрена отдельно.

Переходя к безразмерной форме и используя уравнение непрерывности (5.45), еще раз перепишем граничные условия (5.49), (5.52), и (5.55) в виде

$$v_x = 0, \quad D_x T = 0, \quad \text{при } x = \pm h. \quad (5.56)$$

$$(D_x^2 - k_y^2)D_x v_z = 0, \quad \Delta(D_x^2 + k^2)v_x = 0; \quad \text{при } x = \pm h. \quad (5.57)$$

Последние два условия могут быть еще упрощены рассмотрением (5.44.1) на границе. Несложные преобразования (5.44.1), с учетом соотношений (5.54) и (5.56), показывают, что условия (5.57) эквивалентны условиям

$$D_x v_z = 0, \quad D_x^2 v_z = 0, \quad x = \pm 1. \quad (5.58)$$

Совершенно аналогично могут быть сформулированы граничные условия для других двух направлений поля. Более того, в окончательной форме результаты в обоих случаях совпадают с (5.56) и (5.58).

Таким образом, имеем три амплитудные задачи, сформулированные уравнениями (5.44), (5.45), (5.46), (5.48) и граничными условиями (5.56), (5.58).

Нетрудно заметить, что все три варианта задачи имеют точное решение четного и нечетного типов. Например, для первого типа задачи (поле направлено вдоль оси z) и для третьего (поле направлено вдоль оси y) имеем следующее решение четного типа:

$$v_x = A_1 \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right), \quad v_y = A_2 \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right), \quad v_z = A_3 \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right), \quad (5.59)$$

$$T = B_1 \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right), \quad \rho = C_1 \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right), \quad n = 0, 2, 4, 6, \dots$$

Решения нечетного типа получаются из (5.59) заменой \cos на \sin , а \sin на \cos ; $n = 1, 3, 5, 7, \dots$

Во втором случае (поле параллельно x) получающиеся решения аналогичны, за исключением того, что в случае четного решения имеем $\rho = C_1 \sin(\pi n x / 2)$, а в нечетном - $\rho = C_1' \cos(\pi n x / 2)$. Для нахождения коэффициентов A_1, A_2, A_3, B_1, C_1 получается линейная однородная система уравнений. Требуя обращения в нуль определителей таких систем в каждом из трех случаев, получим три дисперсионных соотношения

$$-\lambda^2 MP + \lambda M^2(P+1) - M^3 + R(m^2 + k_y^2) = \begin{cases} ik_z(k_y^2 + m^2)RBF, \\ -ik_z m^2 RBF, \\ -ik_z k_y^2 RBF. \end{cases} \quad (5.60.1)$$

$$= \begin{cases} ik_z(k_y^2 + m^2)RBF, \\ -ik_z m^2 RBF, \\ -ik_z k_y^2 RBF. \end{cases} \quad (5.60.2)$$

$$= \begin{cases} ik_z(k_y^2 + m^2)RBF, \\ -ik_z m^2 RBF, \\ -ik_z k_y^2 RBF. \end{cases} \quad (5.60.3)$$

Здесь $M = k_y^2 + k_z^2 + m^2$, $m = \frac{n\pi}{2}$, $F = (1 - \lambda P_1)^{-1}$.

Рассмотрим сначала предельный случай бесконечно малых времен релаксации $P_1 = 0$. На границе устойчивости $\lambda = i\omega$ и после разделения действительных и мнимых частей в (5.60) имеем

$$\omega^2 PM - M^3 + R(m^2 + k_y^2) = 0, \quad (5.61)$$

$$\omega = \begin{cases} k_z RB, \\ -k_z RB \frac{m^2}{M^2(1+P)}, \\ -k_z RB \frac{k_y^2}{M^2(1+P)}. \end{cases} \quad (5.61.1)$$

$$\omega = \begin{cases} k_z RB, \\ -k_z RB \frac{m^2}{M^2(1+P)}, \\ -k_z RB \frac{k_y^2}{M^2(1+P)}. \end{cases} \quad (5.61.2)$$

$$\omega = \begin{cases} k_z RB, \\ -k_z RB \frac{m^2}{M^2(1+P)}, \\ -k_z RB \frac{k_y^2}{M^2(1+P)}. \end{cases} \quad (5.61.3)$$

Из последних трех соотношений видно, что знак фазовой скорости волн, распространяющихся вдоль оси z , в первом случае (поле вертикально) совпадает со знаком числа Рэлея, а во втором и третьем случаях - противоположен ему (возмущения распространяются от более холодного конца канала).

Исключая ω из уравнений (5.61), получим квадратные уравнения для спектра критических чисел Рэлея, которые в каждом из трех случаев имеют следующие корни:

$$R_{1,2}^{(1)} = \frac{R_0}{2k_z^2 B_1} \left(-1 \pm \left(1 + 4k_z^2 B_1 \right)^{1/2} \right), \quad (5.62.1)$$

$$R_{1,2}^{(2)} = \frac{R_0(k_y^2 + m^2)^2}{2k_z^2 m^4 B_1} \left(-1 \pm \left(1 + 4k_z^2 B_1 \frac{m^4}{(k_y^2 + m^2)} \right)^{1/2} \right), \quad (5.62.2)$$

$$R_{1,2}^{(3)} = \frac{R_0(k_y^2 + m^2)^2}{2k_z^2 k_y^2 B_1} \left(-1 \pm \left(1 + 4k_z^2 B_1 \frac{k_y^2}{(k_y^2 + m^2)^2} \right)^{1/2} \right), \quad (5.62.3)$$

$$B_1^2 = \frac{B^2 P}{(1 + P)^2}.$$

Здесь $R_0 = \frac{(k_y^2 + k_z^2 + m^2)^3}{k_y^2 + m^2}$ - критическое число Рэлея в отсутствие поля.

Первые из этих корней (индекс внизу) всегда положительны и соответствуют нейтральной устойчивости при подогреве снизу, вторые всегда отрицательны - подогрев сверху.

Рассмотрим сначала случай 2 и нижний уровень неустойчивости $m = 0$. Этому уровню соответствует четное движение типа валов с осями, перпендикулярными границам слоя. В обычной конвекции при данных граничных условиях уровню $m = 0$ соответствует абсолютная неустойчивость по отношению к длинноволновым возмущениям ($R_{\min} = 0$ при $k_y = k_z = 0$).

Полагая в (5.62.2) $m = 0$, найдем

$$R_1^{(2)} = R_0 = \frac{(k_y^2 + k_z^2)^3}{k_y^2}, \quad (R_{\min} = 0), \quad R_2^{(2)} \rightarrow -\infty$$

(тот же результат можно получить и из дисперсионного соотношения (5.60.2) для любых P_1). Этот результат означает, что поле, направленное горизонтально перпендикулярно границам слоя, не оказывает влияния на устойчивость относительно возмущений, соответствующих нижней моде. Однако критические числа Рэлея, соответствующие более высоким уровням спектра, зависят от поля. В частности, минимизируя $R_1^{(2)}$, из (5.62.2) по волновым числам k_y и k_z найдем, что при $B_1 < 3/m^2$ наиболее опасны плоские колебательные возмущения с волновыми числами

$$k_y = 0, k_z = \left(\frac{5m^2 B_1 - 3 \mp (1 + 5m^2 B_1)^{1/2}}{25B_1} \right)^{1/2} \quad (5.63)$$

(в выражении для k_z подогреву снизу соответствует знак "-").

Равновесие при подогреве сверху становится также неустойчивым, но по отношению к возмущениям, соответствующим уровням $n \geq 1$. Минимальным критическим числам Рэля $R_2^{(2)}$ при любых $B_1 \neq 0$ соответствуют плоские колебательные возмущения с волновыми числами (5.63) (в выражении для k_z нужно взять "+").

Характерные нейтральные кривые для данного направления поля и $n = 1$ представлены на рис.5.2 и 5.3. Кривым 1, 2, 3 на рис.5.2 соответствуют $k_y = 0,2; 0,8; 1$ и $B_1 = 10$. На рис.5.3 кривая 1 соответствует $k_y = 0,2$; кривая 2 - $k_y = 0,5$; $B_1 = 10$.

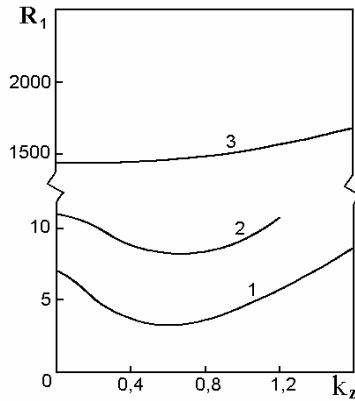


Рис. 5.2. Нейтральные кривые при подогреве снизу. Электрическое поле ориентировано вдоль оси X

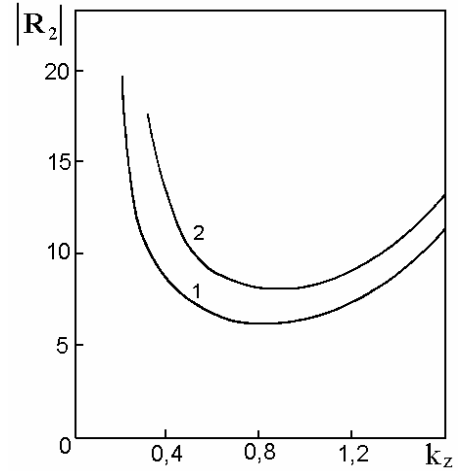


Рис. 5.3. Нейтральные кривые при подогреве сверху

Перейдем к рассмотрению двух других случаев ориентации поля. Полагая в (5.62.1) и (5.62.3) $m = 0$, найдем, что нижнему уровню неустойчивости в этих случаях соответствуют одинаковые критические числа Рэля. (Как следует из (5.60.1) и (5.60.3) это справедливо и для любых P_1). Минимальные критические числа Рэля (5.62.1) и (5.62.3) при $m = 0$ оказываются равными нулю: $R_{1,2}^{(1,3)} = 0$, при $k_y = k_z = 0$. Это означает, что как при подогреве сверху, так и снизу

равновесие абсолютно неустойчиво по отношению к длинноволновым возмущениям. Однако область неустойчивости при подогреве сверху тем меньше, чем меньше величина поля, и в пределе $B_1 \rightarrow 0$ при подогреве сверху равновесие устойчиво. При подогреве снизу наложение поля приводит к понижению устойчивости относительно возмущений с $k_y \neq 0$ и $k_z \neq 0$, так что всегда $R_1^{(1,3)} < R_0$.

Рассмотрим теперь устойчивость равновесия, когда вертикальный слой жидкости находится в вертикальном электрическом поле или горизонтальном, направленным по оси y , (первый и третий случаи) и когда время релаксации заряда конечно $P_1 \neq 0$. Рассмотрение проведем для случая $m = 0$ и $P = 1$. При $P_1 \neq 0$ $F \neq 1$ и из (5.60.1) и (5.60.3) получается дисперсионное соотношение третьей степени

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d_0 \pm id_1 = 0, \quad (5.64)$$

$$a = -P_1 M, \quad M = k_y^2 + k_z^2,$$

$$b = M(1 + 2P_1 M),$$

$$c = -(2M^2 + M^3 P_1 - P_1 R k_y^2),$$

$$d_0 = R k_y^2 - M^3, \quad d_1 = R B m^2 k.$$

Полагая на границе устойчивости $\lambda = i\omega$ и разделяя действительную и мнимую части в (5.64), получим

$$\omega^2 = \frac{(R_0 - R)k_y^2}{M + 2M^2 P_1}, \quad (5.65)$$

$$\omega(-\omega^2 M P_1 + 2M^2 + M^3 P_1 - R P_1 k_y^2) \pm k_z k_y^2 R B = 0.$$

Исключив из этой системы уравнений ω , после несложных преобразований приходим к кубическому уравнению для определения критических чисел Рэлея

$$R^3 + R^2 u + R s + t = 0, \quad (5.66)$$

$$u = (\gamma B^2 - 2\beta - R_0), \quad s = (\beta^2 + 2\beta R_0), \quad t = -R_0 \beta^2 (1 + \alpha)^2 = 0,$$

$$\alpha = P_1(k_y^2 + k_z^2), \quad \beta = \frac{M(1 + \alpha)}{P_1^2}, \quad \gamma = \frac{(1 + 2\alpha)^3 k_y^2 k_z^2}{4\alpha P_1^3}.$$

Полученное кубическое уравнение всегда имеет один действительный корень, соответствующий критическому числу Рэлея при подогреве снизу $R_1 > 0$. Если же действительных корней три, то два из них отрицательны и соответствуют критическим числам Рэлея при подогреве сверху R_2 .

Вычисление корней этого уравнения дает следующие результаты.

Для случая подогрева снизу эти результаты качественно не отличаются от полученных в приближении мгновенной релаксации заряда $P_1 = 0$. В случае подогрева сверху отражением того факта, что кубическое уравнение (5.66) имеет либо один действительный корень, либо три, является

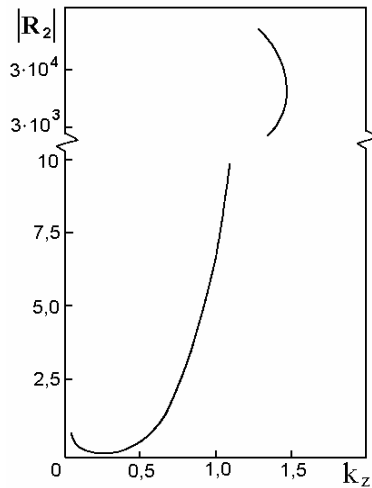


Рис. 5.4. Нейтральная кривая при подогреве сверху и $P_1 = 0,1$

существование у нейтральной кривой на рис.5.4 поворотной точки, соответствующей максимальному волновому числу возмущений, по отношению к которым равновесие при подогреве сверху еще может быть неустойчивым. Другими словами, равновесие при подогреве сверху оказывается неустойчивым только по отношению к существенно длинноволновым возмущениям. Для фиксированных значений параметра поля и чисел Прандтля P , P_1 существуют минимальные длины волн возмущений (максимальные k_y и k_z), по отношению к которым равновесие при подогреве

сверху может быть неустойчивым. На рис.5.4 показана типичная для рассматриваемого случая нейтральная кривая, соответствующая подогреву сверху и $P = 1$; $k_y = 0,2$; $B_1 = \sqrt{10}$; $P_1 = 0,1$. Видно, что равновесие устойчиво по отношению к возмущениям с $k_y > 0,2$ и $k_z > 1,54$.

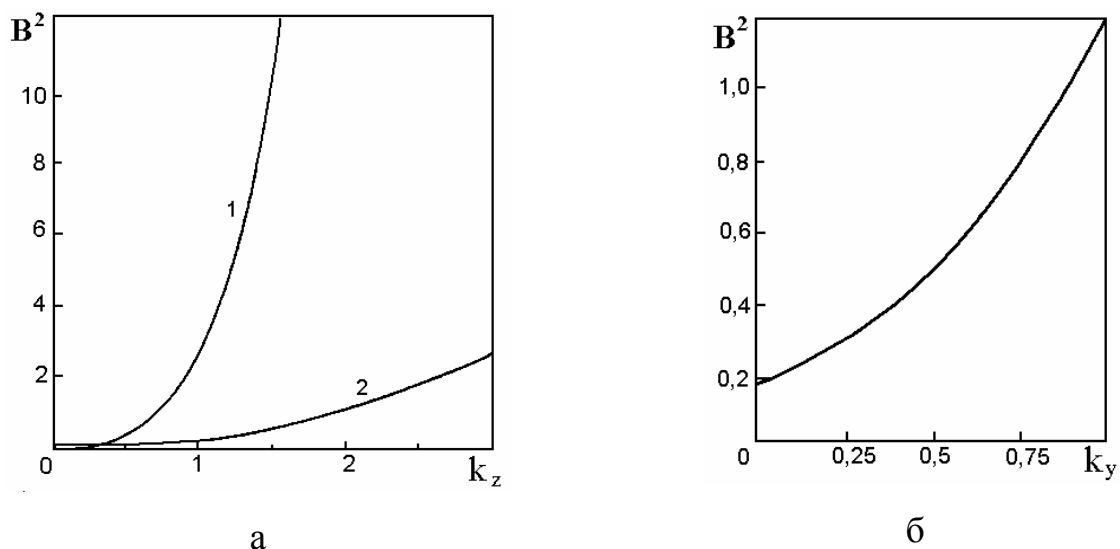


Рис. 5.5. Линии нулевого дискриминанта уравнения (5.66). Выше кривых существуют три действительных корня

Величина максимальных значений k_y и k_z определяется из условия равенства нулю дискриминанта кубического уравнения для критических чисел Рэлея (5.66) и зависит от величины параметра поля. На рис.5.5а показаны линии нулевого дискриминанта для случая $P = 1$; $P_1 = 0,1$. Кривая 1 соответствует $k_y = 0,2$; кривая 2 - $k_y = 1$. Ниже этих кривых кубическое уравнение для критических чисел Рэлея имеет только один действительный корень, соответствующий неустойчивости при подогреве снизу, то есть равновесие при подогреве сверху устойчиво для любых R . Это означает, что для фиксированных P , P_1 и B_1 неустойчивость при подогреве сверху может быть по отношению к возмущениям только определенной структуры. В частности, как следует из рис.5.5 б, при $P_1 = 0,1$; $P = 1$ и $B^2 < 1,6$ нельзя возбудить движения, периодические вдоль оси z с длиной волны

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} < \frac{2\pi}{0,2}.$$

5.3. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО СЛОЯ СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Рассмотрим теперь устойчивость равновесия плоского горизонтального слоя неравномерно нагретой слабопроводящей жидкости, находящейся во внешнем однородном постоянном электрическом поле и в поле тяжести [159]. Слой будем считать безграничным в направлении горизонтальных осей x , y и ограниченным плоскостями $z=0$, h в вертикальном направлении. Как и прежде, будем пренебрегать джоулевым разогревом по сравнению с внешним. Кроме того, как и прежде, предположим, что толщина слоя намного больше дебаевского радиуса. Учитывая результаты, полученные выше, собственную электропроводность жидкости будем считать линейной функцией температуры, а диэлектрическую проницаемость - постоянной величиной.

В рамках принятых предположений система исходных уравнений совпадает с (5.40).

При строго вертикальном подогреве сверху или снизу и вертикальном электрическом поле по-прежнему возможно равновесие жидкости. Для равновесных распределений температуры, напряженности поля и заряда получаем

$$T_0 = -Az, \quad E_0 = \frac{E_{00}}{(1 - \beta_\sigma Az)}, \quad \rho_0 = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon \beta_\sigma A E_{00}}{(1 - \beta_\sigma Az)^2}, \quad (5.67)$$

$$\sigma = \sigma_0(1 + \beta_\sigma T).$$

Для малых возмущений линеаризованная система уравнений в безразмерной форме и в безындукционном ЭГД приближении будет иметь вид

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p + \Delta \vec{u} + RT \vec{e}_0 + RB \rho \vec{e}_0, \quad P \frac{\partial T}{\partial t} - v_z = \Delta T, \quad (5.68)$$

$$P_1 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho = -\frac{\partial T}{\partial z}, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{e} = \rho, \quad \operatorname{rot} \vec{e} = 0.$$

\vec{e}_0 - единичный вектор в направлении оси z . Единицы измерения и безразмерные параметры те же, что и в предыдущем разделе.

Сначала рассмотрим модельную задачу об устойчивости равновесия слоя со свободными, недеформируемыми, идеально теплопроводными и электропроводными границами. Это позволит аналитически, всесторонне исследовать роль кулоновского взаимодействия объемного заряда с внешним полем. Граничные условия в сделанных предположениях следующие:

$$\begin{aligned} v_z = 0, \quad T = 0, \quad n_k \left(T_{ik} - T_{ik}^{(m)} \right) = 0 \quad \text{при } z = 0; 1, \\ T_{ik} = -p \delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \varepsilon_0 \varepsilon \left(E_i E_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} E^2 \right). \end{aligned} \quad (5.69)$$

Стрикционная часть электрического тензора включена в давление, T_{ik} , $T_{ik}^{(m)}$ - тензоры напряжений в жидкости и массиве. Условие равенства касательных напряжений можно преобразовать к виду

$$\eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \varepsilon_0 e_x (\varepsilon E_0 - \varepsilon_m E_m).$$

Или поскольку границы идеально проводящие и поле всегда нормально к ним, то

$$e_x = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0.$$

Последнее условие - это обычное условие на свободной поверхности, которое преобразуется к $v_z'' = 0$. Окончательно, граничные условия к системе (5.68) такие

$$v_z = v_z'' = T = 0 \quad \text{при } z = 0; 1. \quad (5.70)$$

Рассматривая нормальные возмущения вида

$$w(z) \exp \{ -\lambda t + ik_x x + ik_y y \},$$

получим амплитудную задачу

$$\begin{aligned}
-\lambda \Delta v_z &= \Delta^2 v_z - k^2 RT - k^2 RB\rho, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2, \\
-\lambda PT &= \Delta T + v_z, \quad (\lambda P_1 - 1)\rho = T', \quad \Delta = \frac{d^2}{dz^2} - k^2.
\end{aligned}
\tag{5.71}$$

Исключив v_z и ρ , получаем одно уравнение шестого порядка для T

$$\begin{aligned}
& -\lambda^3 PP_1 \Delta T + \lambda^2 (P \Delta T - P_1 \Delta^2 T - PP_1 \Delta^2 T) - \lambda (P_1 \Delta^3 T - \Delta^2 T - P \Delta^2 T + P_1 k^2 RT) \cdot \\
& + k^2 RT + \Delta^3 T - k^2 RBT' = 0.
\end{aligned}
\tag{5.72}$$

Шесть граничных условий для температуры получаются использованием амплитудных уравнений и граничных условий для скорости

$$T = T'' = T^{IV} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0; 1.$$

Умножая теперь уравнение (5.72) на комплексно сопряженную T^* и интегрируя в пределах от 0 до 1, можно показать вещественность и знакоопределенность всех интегралов, кроме

$$J = \int_0^1 T^* T' dz.$$

Интегрируя его по частям, получаем

$$J = \int_0^1 T T^{*'} dz = -J^*.$$

Таким образом, интеграл J - чисто мнимый. Тогда приближенное решение уравнения (5.72) можно представить в виде [72]

$$T = a_1 e^{imz}, \quad \text{Im}(m) = 0.$$

Подставив решение в уравнение (5.72), получим кубическое уравнение для декремента λ

$$\begin{aligned}
a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d &= 0, \quad a = -PP_1 M, \quad M = k^2 + m^2, \\
b &= M(MP_1 + PP_1 M + P), \quad c = -(M^2 + M^2 P + M^3 P_1 - P_1 k^2 R), \\
d &= M^3 - k^2 R + iRBk^2 m.
\end{aligned}
\tag{5.74}$$

В предельном случае $P_1 = 0$ (мгновенная релаксация заряда) по аналогии с результатами раздела 5.2 для критических чисел Рэлея, получим

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_0}{2m^2 B_1^2} \left(-1 + \sqrt{1 + 4m^2 B_1^2} \right), & R_0 &= \frac{(k^2 + m^2)^3}{k^2}, \\ R_2 &= -\frac{R_0}{2m^2 B_1^2} \left(1 + \sqrt{1 + 4m^2 B_1^2} \right), & B_1 &= \frac{B\sqrt{P}}{(1+P)}. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Здесь $R_{1,2}$ - критические числа Рэлея при подогреве снизу и сверху соответственно. Минимизируя их по волновому числу, находим, что волновое число, соответствующее минимуму R_1 и R_2 , как и в случае обычной конвекции [125], равно $k_m = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{\pi n}{\sqrt{2}}$. Сами же минимальные критические числа Рэлея монотонно убывают с возрастанием поля (рис.5.6).

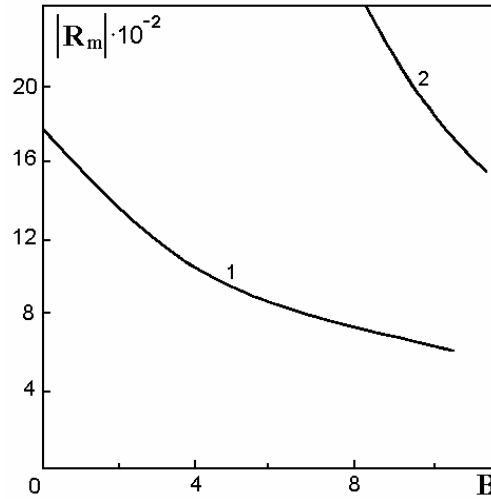


Рис. 5.6. Зависимости минимальных критических чисел Рэлея от безразмерной напряженности поля. 1 - подогрев снизу, 2 - сверху

Как уже отмечалось, равновесие в данном случае неустойчиво только по отношению к колебательным возмущениям. Для частот нейтральных колебаний получаем

$$\omega_1 = \frac{(k^2 + m^2)}{2B_1 \sqrt{P} m} \left(-1 + \sqrt{1 + 4m^2 B_1^2} \right), \quad \omega_2 = -\frac{(k^2 + m^2)}{2B_1 \sqrt{P} m} \left(1 + \sqrt{1 + 4m^2 B_1^2} \right). \quad (5.76)$$

Асимптотическое значение частот, соответствующее большим полям равно

$$\omega_{\infty} = \frac{3m^2}{2\sqrt{P}}.$$

Как и в случае вертикального слоя, наиболее опасные возмущения представляют собой бегущие волны.

В случае конечного времени релаксации заряда $P_1 \neq 0$ для определения критических чисел Рэлея получается кубическое уравнение вида

$$R^3 + R^2(ZG^3 - 2G - 3R_0) + R(3R_0 + G^2 + 4R_0G) - R_0(R_0 + G)^2 = 0. \quad (5.77)$$

Здесь обозначено

$$Z = \frac{B^2 k^4 m^2 P_1^2}{M^8 (1 + P)^2}, \quad G = \frac{M^4 P_1 + M^4 P P_1 + M^2 P}{P_1^2 k^2}.$$

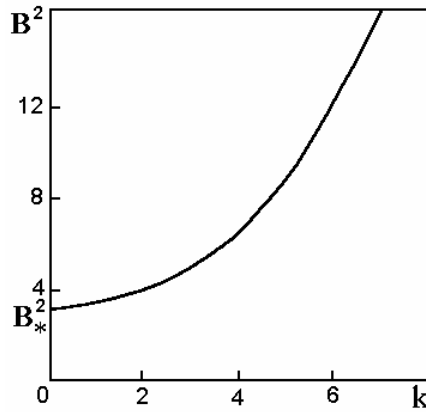


Рис. 5.7. Линия нулевого дискриминанта уравнения (5.77)

Уравнение (5.77) имеет либо три действительных корня, либо один, соответствующий критическому числу Рэлея при подогреве снизу. Два других действительных корня (в случае трех корней) соответствуют критическим числам Рэлея при подогреве сверху. Дискриминантная кривая может быть представлена в виде функции $B = B(k, P, P_1)$. При $P = P_1 = 1$ и $m = \pi$ она изображена на рис.5.7. Выше кривой расположена область параметров, в которой существуют три действительных корня уравнения (5.77), ниже - один, соответствующий подогреву снизу. Анализ дискриминантной кривой показывает, что при $P_1 \neq 0$ существует критическое поле B_* , только при превышении которого неустойчивость при подогреве сверху становится вообще

возможной. Напомним, что при $P_1 = 0$ равновесие при подогреве сверху неустойчиво при любых B , если $|R| > |R_2|_*$ (достаточно сильный подогрев). Так для параметров, соответствующих рис.5.7, равновесие при подогреве сверху устойчиво при любых числах Рэлея, если $B < B_* \approx 1,7$.

В целях получения более точных количественных соотношений сравнения с экспериментом задача (5.71), (5.73) интегрировалась численно, методом Рунге-Кутты-Мерсона с ортогонализацией решений на каждом шаге. Граничные условия соответствовали твердым, идеально теплопроводным границам. В качестве начальных приближений к критическим числам Рэлея и частотам нейтральных колебаний использовались значения соответствующих величин, вычисленные по формулам (5.75), (5.76). При расчетах использовался алгоритм, подробно описанный в работе [133]. Необходимость ортогонализации диктовалась тем, что в некоторых расчетах число Прандтля выбиралось большим. В таких расчетах малый параметр при старшей производной заставляет заботиться о сохранении линейной независимости решений в процессе интегрирования. Приведем результаты численного интегрирования.

На рис.5.8а, б изображены нейтральные кривые и частоты нейтральных колебаний, соответствующие подогреву снизу и $P = P_1 = 1$. (Кривые 1 - $B = 3$,

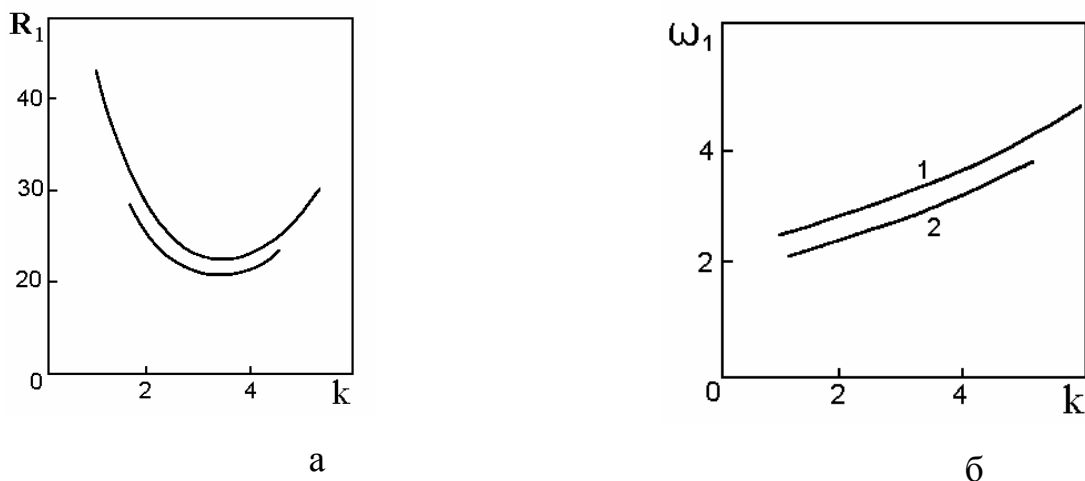


Рис.5.8. Нейтральные кривые и частоты нейтральных колебаний при подогреве снизу

кривые 2 - $B = 5$). На рис.5.9 изображены нейтральные кривые для тех же значений параметров, но при подогреве сверху. Зависимость минимальных критических чисел Рэлея от параметра поля B при $P = P_1 = 1$ представлена на рис.5.6.

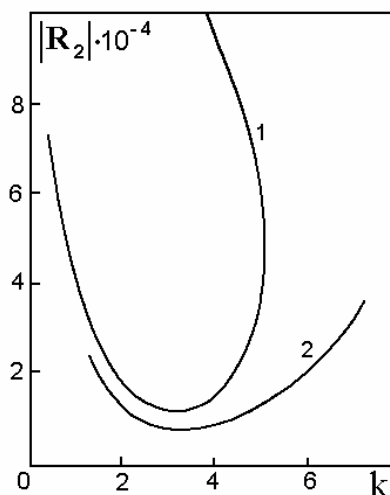


Рис. 5.9. Нейтральные кривые при подогреве сверху

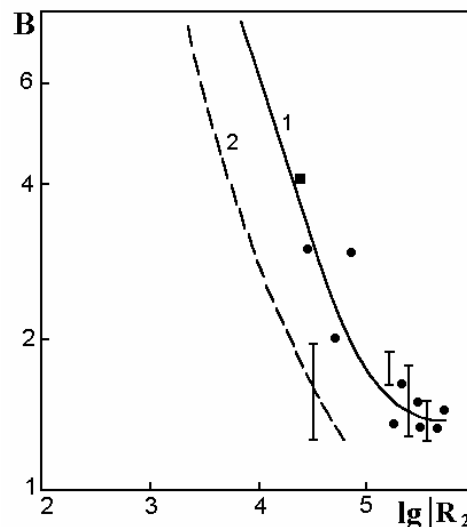


Рис. 5.10. Зависимость критического параметра поля от логарифма минимального критического числа Рэлея при подогреве сверху. Представлены теоретические и экспериментальные данные различных авторов

Как уже было отмечено выше, в работе [74] система, аналогичная (5.71), интегрировалась методом Бубнова-Галеркина. Результаты для случая подогрева сверху и $P = 480$, $P_1 = 0,1$ сравнивались с экспериментальными данными [73, 74]. На рис.5.10 представлены: сплошная кривая - расчет методом Бубнова-Галеркина [74], штриховая кривая - расчет по приближенной формуле (5.75) с $R_0 \approx 1708$, черный квадрат - расчет методом Рунге-Кутты. Остальные точки соответствуют результатам экспериментов [73, 74].

Видно, что расчеты, проведенные различными методами и различными авторами, дают близкие результаты и удовлетворительно согласуются с экспериментом.

В заключение отметим глубокую аналогию длиноволнового характера рассмотренной в этой главе объемной колебательной неустойчивости и

поверхностной колебательной неустойчивостью, рассмотренной в первой главе, заключающуюся в существовании максимальных волновых чисел возмущений, по отношению к которым равновесие еще может быть неустойчивым (поворотные точки на рис.1.3, 5.4, 5.9) при конечных временах релаксации заряда. Физическая сущность этого явления заключается, по-видимому, в том, что время релаксации заряда фиксировано, тогда как частоты нейтральных колебаний растут с ростом волнового числа (рис.1.4, 5.8) и наступает момент, когда заряд не успевает отрелаксировать надлежащим образом.