

6. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ И КОНВЕКЦИЯ ПРОВОДЯЩИХ ЖИДКОСТЕЙ С УЧЕТОМ ТЕРМОДИФФУЗИОННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ

В этой главе рассматриваются некоторые задачи, связанные с выяснением характера и степени влияния внутренних электрических полей (таких как термоэлектрическое поле, электрическое поле двойного слоя) на устойчивость равновесия и движение неоднородно нагретой проводящей жидкости. Актуальность этих задач связана с экстремальными условиями современных технологий: невесомостью, большими градиентами температур и концентраций, в которых соответствующие эффекты могут существенно проявиться.

6. 1. УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ С УЧЕТОМ ТЕРМОДИФФУЗИОННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ

Как известно, термоэлектрические эффекты сводятся к возникновению в неоднородно нагретой жидкости электрического поля или тока в отсутствие внешней разности потенциалов [93] .

С точки зрения неравновесной термодинамики существование термоэлектрического поля и тока связано с термодиффузией электрических зарядов [134]. Феноменологический подход позволяет записать для плотностей электрического тока и потока энергии в неподвижной жидкости уравнения [93]

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} - \alpha_T \nabla T), \quad \vec{\Pi} = \phi \vec{j} + \alpha_T T \vec{j} - \kappa \nabla T. \quad (6.1)$$

α_T - дифференциальная термо-ЭДС жидкости, определенным образом выражающаяся через другие кинетические коэффициенты (см. раздел 6.2 настоящей главы).

В зависимости от того, в каких условиях достигается стационарное состояние, можно выделить два интересных, с точки зрения гидродинамики, случая.

Первый случай соответствует электрически разомкнутой цепи жидкость-резервуар. Тогда в стационарном состоянии

$$\vec{j} = 0, \quad \vec{E} = \alpha_T \nabla T, \quad \text{div} \vec{E} = \alpha_T \Delta T = \rho / \epsilon \epsilon_0. \quad (6.2)$$

Видно, что в том случае, когда $\Delta T \neq 0$, в жидкости может существовать и электрическое поле \vec{E} и объемный заряд ρ , а следовательно и кулоновские силы. В этой ситуации в соответствующей постановке задачи могут быть рассмотрены электрогидродинамические явления.

Наконец, в том случае, когда электрическая цепь жидкость-резервуар электрически замкнута, может быть достигнуто стационарное состояние, в котором

$$\vec{E} = 0, \quad \vec{j} = -\sigma \alpha_T \nabla T. \quad (6.3)$$

В этом случае, при соответствующей постановке задачи, могут оказаться существенными, интересными и важными магнитогидродинамические явления, связанные с действием пондеромоторной силы $\vec{j} \times \vec{B}$ [135-137].

Могут представлять интерес и другие ситуации. Отметим, например, следующую. Допустим, что к жидкости, находящейся в резервуаре с характерным размером h , приложена внешняя постоянная разность температур. Тогда стационарное распределение температур будет достигнуто за время порядка $\tau_T \sim h^2 / \chi$. Разделение зарядов в результате термодиффузии и возникновение термоэлектрического поля произойдет за время порядка $\tau_D \sim h^2 / D$ (D – коэффициент диффузии). Обычно $\chi \gg D$, поэтому в течение промежутка времени $\Delta \tau \sim h^2 \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{\chi} \right)$ в объеме жидкости наблюдается квазистационарное состояние, в котором

$$\vec{E} = 0, \quad \nabla q_i \approx 0, \quad \vec{j} \approx -\sigma \alpha_T \nabla T.$$

(Внешнего электрического поля нет).

Запишем основные уравнения электрогидродинамики с учетом термоэлектрических эффектов. Для этого используем систему уравнений ЭГД (5.6), считая справедливыми все приближения, в которых она была получена. Кроме того, процессы диссоциации-рекомбинации будем считать квазиравновесными, т.е. в (5.6) нужно положить

$$\Gamma(q_i) = R(q_i, q_k), \quad i \neq k.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \gamma_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right) &= -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} - \gamma_0 \vec{g} \beta T + \rho \vec{E}, \quad \text{div} \vec{v} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \nabla T &= \chi \Delta T, \quad \frac{\partial q_i}{\partial t} = -\text{div}(q_i \vec{v} + \vec{j}_i), \\ \vec{j}_i &= \text{sign}(q_i) b_i q_i \vec{E} - D_i \nabla q_i + \frac{K_i q_i}{T} \nabla T, \quad \vec{j} = \sum_i \vec{j}_i, \quad \text{div} \vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \varepsilon, \\ \rho &= \sum_i q_i, \quad \text{rot} \vec{E} = 0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

При рассмотрении конкретных задач эти уравнения будут дополнены уравнениями состояния, соотношениями между кинетическими коэффициентами (типа Нернста-Эйнштейна) и граничными условиями.

Рассмотрим, как изменяются уравнения магнитной гидродинамики с учетом термоэлектрических эффектов. Впервые уравнения термоманитогидродинамики (ТМГД) были выписаны в работе [137]. Кратко остановимся на их выводе и обосновании.

Пусть неоднородно нагретая жидкость помещена во внешнее магнитное поле. Внешнее электрическое поле отсутствует. Тогда для плотности электрического тока и плотности потока энергии можно записать [93]

$$\vec{j} / \sigma = \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} - \alpha_T \nabla T \right) - R_h \left[\vec{B} \times \vec{j} \right] - N \left[\vec{B} \times \nabla T \right], \tag{6.5}$$

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H} + \alpha_T \vec{j} T - \kappa \nabla T + NT [\vec{B} \times \vec{j}] + Z [\vec{B} \times \nabla T].$$

Здесь кроме известных слагаемых содержатся дополнительные, существование которых связано со специфическими термомагнитными эффектами. Из первого уравнения видно, что два последних слагаемых ответственны за возникновение дополнительного продольного и поперечного электрического поля. Это так называемые эффекты Нернста-Эттингсхаузена. Во втором уравнении два последних слагаемых ответственны за возникновение добавочного продольного и поперечного градиента температур (эффекты Риги-Ледюка-Маджи и Риги-Ледюка соответственно).

Однако в рамках термомагнитогидродинамических взаимодействий роль этих эффектов мала и ими вполне можно пренебречь, как эффектами второго порядка. Действительно, оценим, например, отношение холловского поперечного тока к основному термоэлектрическому

$$\delta = \left(\frac{R_h |\vec{B} \times \vec{j}|}{\alpha_T |\nabla T|} \right) \approx R_h B \sigma.$$

Принимая $R_h \approx 10^{-10} \text{ м}^3/\text{Кл}$, $B \approx 1 \text{ Тл}$, $\sigma \approx 10^6 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$, получим $\delta \approx 10^{-2} \ll 1$. В связи с этим в дальнейшем всеми эффектами второго порядка будем пренебрегать. Тогда (6.5) можно записать так

$$\vec{j} / \sigma = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} - \alpha_T \nabla T, \quad \vec{\Pi} = \alpha_T T \vec{j} - \kappa \nabla T + [\vec{E} \times \vec{H}], \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu}. \quad (6.6)$$

При записи уравнения Навье-Стокса будем учитывать только электромагнитную силу $\vec{j} \times \vec{B}$, считая, что силой Кулона можно пренебречь

$$\gamma \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \gamma \vec{g} + \vec{j} \times \vec{B}. \quad (6.7)$$

Расходимость полного тока будем считать нулевой

$$\text{div} \vec{j} = 0. \quad (6.8)$$

Уравнение закона сохранения энергии можно преобразовать к уравнению переноса тепла обычным способом [93]. Тогда получим

$$\gamma c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \nabla T \right) = \kappa \Delta T + j^2 / \sigma - \vec{j} T \nabla \alpha_T. \quad (6.9)$$

Таким образом, система уравнений (6.6)-(6.9) с соответствующими граничными условиями служит для определения магнитогидродинамического движения с учетом термоэлектрических эффектов.

6.2. СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ И ЗАРЯДА В ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЯЧЕЙКЕ

Как уже говорилось, разделение зарядов в неоднородно нагретой жидкости и возникновение термоэлектрического поля связано с процессами термодиффузии ионов. Представляет интерес, пользуясь кинетическими уравнениями переноса ионов, записанными в разделе 6.1 настоящей главы, найти распределение термоэлектрического поля и объемного заряда в изолированной термоэлектрической ячейке, а также выразить дифференциальную термо-ЭДС через кинетические коэффициенты.

Рассмотрим плоский горизонтальный слой вязкой несжимаемой жидкости, находящийся в поле тяжести и подогреваемый снизу. Жидкость будем считать электропроводной, содержащей для простоты только два сорта ионов (положительные и отрицательные). Предположим, что ионы имеют разные коэффициенты подвижности, диффузии и термодиффузии. Слой в целом электронейтрален. Однако, в результате различной термодиффузии ионов в слое произойдет частичное разделение зарядов и возникнет термо-ЭДС, поле которой параллельно градиенту температуры. Очевидно, при таких условиях возможно механическое равновесие, при котором жидкость неподвижна, все величины (электрическое поле, заряд, температура) зависят только от вертикальной координаты и результирующий ток каждого сорта ионов равен нулю. (Считаем, что внешнего электрического поля нет и границы слоя непроницаемы для ионов).

Выбрав ось z перпендикулярно слою, ось x параллельно и снабжая величины, относящиеся к положительным зарядам индексом 1, к отрицательным - индексом 2 и используя результаты 6.1, запишем уравнения, определяющие равновесные значения температуры, электрического поля и заряда в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T}{dz^2} = 0, \quad T = T_{00} + T_0(z), \quad j_1 = q_{10} b_1 E_0 - D_1 \frac{dq_{10}}{dz} - K_1 \frac{q_{10}}{T} \nabla_z T_0 = 0, \\ j_2 = q_{20} b_2 E_0 - D_2 \frac{dq_{20}}{dz} - K_2 \frac{q_{20}}{T} \nabla_z T_0 = 0, \\ \frac{dE_0}{dz} = (q_{10} + q_{20}) / \varepsilon_0 \varepsilon = \rho_0 / \varepsilon_0 \varepsilon, \quad E_0 = -\frac{d\varphi}{dz}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Здесь $j_{1,2}$ - плотности токов каждого сорта ионов, q_{10} , q_{20} плотности зарядов разного знака, $b_{1,2} > 0$, $D_{1,2} > K_{1,2}$ соответственно обозначают коэффициенты подвижности, диффузии и термодиффузии ионов, остальные обозначения общепринятые, индекс "0" относится к равновесным величинам.

Проинтегрируем систему (6.10), выбрав следующие условия для определения постоянных интегрирования:

$$T(-h) = T_1 = T_{00} + Ah, \quad A \equiv \frac{T_1 - T_2}{2h}; \quad (6.11.a)$$

$$T(h) = T_2 = T_{00} - Ah; \quad (6.11.б)$$

$$\varphi_0(0) = 0; \quad (6.11.в)$$

$$\int_{-h}^h \rho_0(z) dz = 0; \quad (6.11.г)$$

$$\int_{-h}^h q_{10}(z) dz = 2hq_0; \quad (6.11.д)$$

$$E_0 = -\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}\right)_{z=h} = 0. \quad (6.11.e)$$

Отметим, что условие (6.11.в) дает начало отсчета потенциала, условие (6.11.г) - это условие нейтральности слоя в целом, условие (6.11.д) означает задание

степени диссоциации (электропроводности) жидкости, условие (6.11.е) - это условие отсутствия зарядов на границах слоя (при $z = -h$, это условие должно выполняться автоматически, из-за нейтральности слоя в целом).

При нахождении стационарных решений используем приближения

$$\frac{\delta T}{T_{00}} = \frac{T_1 - T_2}{T_{00}} \ll 1, \quad \frac{e_+ \max|\varphi_0|}{k T_{00}} \ll 1, \quad (6.12)$$

(e_+ заряд положительного иона, k - постоянная Больцмана), а также соотношение Нернста-Эйнштейна $b_i = \frac{e_+ D_i}{k T_{00}}$.

В рамках принятых предположений стационарные распределения температуры, электрического поля и объемного заряда получаются следующими (единица измерения z - полуширина слоя h)

$$\begin{aligned} T = T_{00} - A h z, \quad E_0 = -\frac{q_0 A (k_1 - k_2) r^2}{\varepsilon_0 \varepsilon T_{00}} \left(1 - \frac{\text{ch} \Gamma z}{\text{ch} \Gamma} \right), \\ \rho_0 = -\frac{q_0 A (k_1 - k_2) r^2}{T_{00}} \cdot \frac{\text{sh} \Gamma z}{\text{sh} \Gamma}, \quad \Gamma \equiv \frac{h}{r}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Здесь $r = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon k T_{00}}{2 e_+ q_0}}$ - радиус экранирования Дебая-Хюккеля, $k_{1,2} = K_{1,2} / D_{1,2}$ -

термодиффузионные отношения ионов.

Представляет интерес проанализировать полученные решения.

В частности, для средних значений напряженности поля заряда и градиента заряда находим

$$\begin{aligned} \langle E_0 \rangle = -A \left(\frac{q_0 (k_1 - k_2) r^2}{\varepsilon_0 \varepsilon T_{00}} \left(1 - \frac{\text{th} \Gamma}{\Gamma} \right) \right), \quad \langle \rho_0 \rangle = 0, \\ \left\langle \frac{d\rho_0}{dz} \right\rangle = \frac{q_0 (k_1 - k_2) A \text{th} \Gamma}{T_{00} \Gamma}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Из полученных соотношений видно, что при толщине слоя, значительно превосходящей дебаевский радиус $\Gamma \gg 1$, средние значения поля и градиента стремятся к постоянным, не зависящим от толщины слоя значениям

$$\langle E_0 \rangle_{\max} = -\frac{q_0(k_1 - k_2)r^2 A}{\varepsilon_0 \varepsilon T_{00}} = -\alpha_T A, \quad \left\langle \frac{d\rho_0}{dz} \right\rangle = 0. \quad (6.15)$$

Дифференциальная термо-ЭДС жидкости оказывается равной

$$\alpha_T = \frac{q_0(k_1 - k_2)r^2}{\varepsilon_0 \varepsilon T_{00}}. \quad (6.16)$$

Подставляя сюда значения квадрата дебаевского радиуса и выражая термодиффузионные отношения через теплоты переноса ионов Q_i , найдем

$$\alpha_T = \frac{Q_1 - Q_2}{e_+ T_{00}}. \quad (6.17)$$

Этот результат имеет весьма общий характер и после получения его, с феноменологической точки зрения становится очевиден.

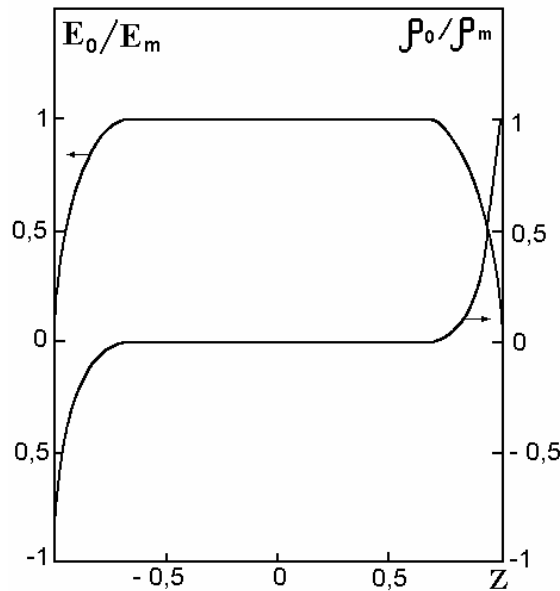


Рис. 6.1. Распределения напряженности электрического поля и плотности заряда поперек ячейки

На рис.6.1 показаны распределения поля и заряда в ячейке в относительных единицах. Видно, что вблизи границ имеются объемно заряженные области, размеры которых порядка дебаевского радиуса экранирования. Вне этих слоев поле однородно и объемный заряд отсутствует (в рамках линейного распределения температуры). Это означает, что при толщине слоя h ,

значительно превышающей дебаевский радиус, можно не учитывать процессов диффузии и для плотности тока писать простое выражение

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} - \alpha_T \nabla T) \quad (6.18)$$

где \vec{E} и ∇T в общем случае определяются внешними условиями, а σ и α_T - есть известные функции температуры.

Представляет интерес также получить распределение поля и заряда в том случае, когда к ячейке, находящейся в диэлектрическом массиве, приложена внешняя разность потенциалов $2\Phi_0$.

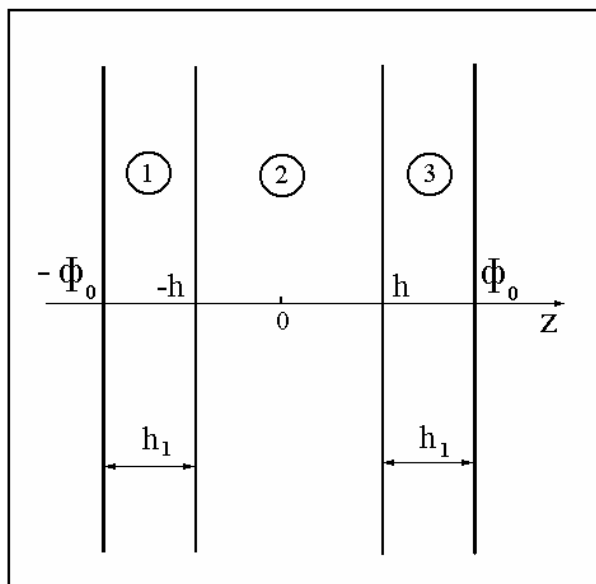


Рис. 6.2. Термоэлектрическая ячейка с прослойками диэлектриков

Пусть слой жидкости окружен слоями диэлектрика толщиной h_1 и диэлектрической проницаемостью ϵ_1 (рис.6.2). Внешние границы диэлектриков поддерживаются при постоянных потенциалах $\pm\Phi_0$. В каждом слое диэлектрика потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа, поэтому

$$\varphi_1 = a_1 z + b_1, \quad \varphi_3 = a_3 z + b_3.$$

Граничные условия для определения всех постоянных интегрирования следующие:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(-h-h_1) &= -\Phi_0, \quad \varphi_1(-h) = \varphi_2(-h), \\
\varepsilon_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)_{z=-h} &= \varepsilon_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)_{z=-h}, \quad \varphi_2(h) = \varphi_3(h), \\
\varepsilon_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)_{z=h} &= \varepsilon_3 \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right)_{z=h}, \quad \varphi_3(h+h_1) = \Phi_0.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Остальные два условия - это по-прежнему условия нейтральности слоя (6.11.г) и задание степени диссоциации (6.11.д).

Решая уравнения (6.10) в сформулированных выше приближениях и удовлетворяя всем условиям, после несложных, но громоздких выкладок, получим распределение электрического поля и объемного заряда в жидкости в следующем виде:

$$\begin{aligned}
E_0 &= -\alpha_T A \left[1 - \frac{\Gamma(1+\beta) \operatorname{ch} \Gamma z}{\operatorname{sh} \Gamma + \beta \Gamma \operatorname{ch} \Gamma} \right] + \frac{\Phi_0 \Gamma \operatorname{ch} \Gamma z}{h(\operatorname{sh} \Gamma + \beta \Gamma \operatorname{ch} \Gamma)}, \\
\rho_0 &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 \alpha_T A \Gamma (1+\beta) \operatorname{sh} \Gamma z}{h(\operatorname{sh} \Gamma + \beta \Gamma \operatorname{ch} \Gamma)} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 \Phi_0 \Gamma^2 \operatorname{sh} \Gamma z}{h^2 (\operatorname{sh} \Gamma + \beta \Gamma \operatorname{ch} \Gamma)}, \quad \beta = \frac{\varepsilon_2 h_1}{\varepsilon_1 h_2},
\end{aligned} \tag{6.20}$$

α_T определяется соотношением (6.16). При $\Gamma \gg 1$ решение, как и раньше, имеет погранслойный характер. В основной области слоя $E_0 \approx -\alpha_T A$. Объемный заряд в дебаевском слое теперь больше, чем при $\Phi_0 = 0$ и экранирует поле, создаваемое внешней разностью потенциалов $2\Phi_0$. При $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \gg 1$, точнее при $\beta \gg 1$ и $\Phi_0 \rightarrow 0$ решение (6.20) переходит в (6.13).

6.3. ВЛИЯНИЕ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА КОНВЕКТИВНУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ

В предыдущем параграфе было получено стационарное распределение термоэлектрического поля и заряда в плоском слое неоднородно нагретой жидкости. Допустим, что слой находится в поле тяжести и ориентирован горизонтально. Для определенности будем считать, что слой подогревается снизу. Тогда в результате действия архимедовых сил, при определенной

разности температур равновесие слоя может стать неустойчивым и возникнет конвекция. Однако, поскольку в жидкости имеется термоэлектрическое поле, а при нарушении лапласовского распределения температур появится и объемный заряд, то кроме архимедовых сил необходимо учесть и кулоновские.

Считая, что в равновесии распределение температуры, поля и заряда совпадают с найденными в 6.2, рассмотрим поведение возмущений. Для этого запишем уравнения Навье-Стокса, теплопроводности, закон сохранения заряда и уравнения для электрического поля.

В уравнение Навье-Стокса кроме архимедовых сил включим кулоновские силы, учитывающие взаимодействие возмущений объемного заряда с термоэлектрическим полем. В уравнении теплопроводности термоэлектрические эффекты учитывать не будем, поскольку в отсутствие внешнего поля и сквозного тока они представляют собой эффекты второго порядка по α_T . Тогда получим

$$\begin{aligned} \gamma_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right) &= -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} - \gamma_0 \vec{g} \beta T + \rho \vec{E}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \nabla T - (\vec{v} \vec{e}_0) &= \chi \Delta T, \quad \text{div} \vec{v} = 0, \\ \frac{\partial q_i}{\partial t} + \vec{v} \nabla q_{i0} + \vec{v} \nabla q_i &= -\text{div} \left(q_i b_i \vec{E} - D_i \nabla q_i + q_0 \frac{K_i}{T_{00}} \nabla T \right); \quad i=1, 2, \\ \text{div} \vec{E} &= (q_1 + q_2) / \varepsilon_0 \varepsilon = \rho / \varepsilon_0 \varepsilon, \quad \text{rot} \vec{E} = 0. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Систему (6.21) можно упростить, сложив уравнения закона сохранения зарядов и предположив, что $D_1 \approx D_2 = D$ (здесь это не существенно). Тогда вместо двух уравнений получим одно уравнение закона сохранения избыточного объемного заряда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho_0 + \vec{v} \nabla \rho = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rho + D \Delta \rho + q_0 (k_1 - k_2) D \Delta T, \tag{6.22}$$

$\sigma_0 = q_0 (b_1 + b_2)$ - электропроводность жидкости. С учетом полученного уравнения запишем систему (6.21) в безразмерной форме, выбрав в качестве

единиц измерения: длины - h - полуширину слоя, температуры - Ah , времени - $h^2 / \nu >$ скорости - χ/h , поля - $\alpha_T A$, избыточного объемного заряда - A/h , потенциала - $\varepsilon_0 \varepsilon \alpha_T Ah$, единицы давления выбираются так, чтобы коэффициент при ∇p был равен единице. Выполнив простые преобразования, получаем

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{P} (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \Delta \vec{v} + RT \vec{e}_0 + B \rho \vec{E}, \quad P \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \nabla T - \vec{v} \vec{e}_0 = \Delta T,$$

$$\text{div} \vec{v} = 0, \quad P_1 \frac{\partial \rho}{\partial t} + P_2 \vec{v} \nabla \rho_0 + P_2 \vec{v} \nabla \rho = -\rho + P_3 \Delta \rho + \Delta T, \quad \text{div} \vec{E} = \rho, \quad (6.23)$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi, \quad R = \frac{g \beta A h^4}{\nu \chi}, \quad B = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \alpha_T^2 A^2 h^2}{\eta \chi},$$

$$P = \frac{\nu}{\chi}, \quad P_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \nu}{\sigma_0 h^2}, \quad P_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \chi}{\sigma_0 h^2}, \quad P_3 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon D}{\sigma_0 h^2}.$$

Линеаризуем систему (6.23) по малым возмущениям, учитывая, что $\vec{E} = E_0 \vec{e}_0 + \vec{e}$, где E_0 равновесное распределение поля, определенное в предыдущем параграфе. Кроме того, как обычно, для исключения давления и компонент скорости v_x, v_y дважды применим операцию rot к уравнению Навье-Стокса и спроецируем его на ось z . Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta v_z = \Delta^2 v_z + R \Delta_2 T + B \left(E_0 \Delta_2 \rho + \frac{d\rho_0}{dz} \Delta_2 \varphi \right), \quad P \frac{\partial T}{\partial t} - v = \Delta T,$$

$$\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad P_1 \frac{\partial \rho}{\partial t} + P_2 \frac{d\rho_0}{dz} v_z = -\rho + P_3 \Delta \rho + \Delta T, \quad \Delta \varphi = -\rho.$$

В предыдущем разделе было найдено, что при различных граничных условиях распределения термоэлектрического поля и объемного заряда имеют погранслойный характер. В приграничных слоях, толщина которых порядка дебаевского радиуса, сосредоточен практически весь объемный заряд. В дальнейшем будем считать толщину слоя намного больше дебаевского радиуса r (т.е. $\Gamma = h/r \gg 1$), а в основной области слоя положим

$$E_0 = -1, \quad \rho_0 = \frac{d\rho_0}{dz} = 0.$$

Для простоты будем считать границы основной области слоя идеально теплопроводными, не деформируемыми и лишенными касательных напряжений. Тогда граничные условия к системе (6.24) будут иметь вид

$$v_z = v_z'' = T = \rho = 0, \quad z = \pm 1. \quad (6.25)$$

В случае нормальных возмущений вида $a'(z)\exp\{-\lambda t + ik_x x + ik_y y\}$ задача (6.24), (6.25) имеет точное решение. Требование его нетривиальности приводит к дисперсионному соотношению для декремента λ

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0, \quad a = -PP_1M^2, \quad M^2 = k^2 + \pi^2/4, \quad (6.26)$$

$$b = M^2(P P_1 M^2 + P_1 M^2 + P + P P_3 M^2),$$

$$c = -(M^4 + P M^4 + P_1 M^6 + P_3 M^6 + P P_3 M^6 - R k^2 P_1),$$

$$d = -R k^2 + M^6 + M^8 P_3 - R k^2 P_3 M^2 - B k^2 M^2.$$

Сначала рассмотрим устойчивость по отношению к монотонным возмущениям. Положив $\lambda = 0$, для критического числа Рэлея получим

$$R_1 = R_0 - B \frac{M^2}{(1 + P_3 M^2)}. \quad (6.27)$$

$R_0 = M^6 / k^2$ - критическое число Рэлея в отсутствие эффектов термо-ЭДС.

Из полученного соотношения (6.27) видно, что возникновение поля термо-ЭДС является дестабилизирующим фактором, по крайней мере по отношению к монотонным возмущениям.

Рассмотрим теперь устойчивость по отношению к колебательным возмущениям. Полагая в (6.26) $\lambda = i\omega$, получим

$$\omega^2 = \frac{k^2(R_1 - R_2)}{(P P_{11} + P_{11} + P)}, \quad P_{11} = P_1 M^2, \quad R_2 = R_0 \frac{(1 + P_{11})(P_{11} + P)}{P_1^2} + \frac{P M^2 B}{P_{11}(1 + P)}. \quad (6.28)$$

Нетрудно показать, что $R_2 > R_1$ при $B = 0$. Это неравенство сохраняется и при любых значениях B , поэтому $\omega^2 < 0$ что противоречит предположению о вещественности ω . Следовательно, колебательная неустойчивость невозможна при любых значениях параметров.

Приведем оценки степени влияния эффектов термо-ЭДС на возникновение конвекции.

Прежде всего отметим, что при $\sigma_0 > 10^{-8} \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$ и $D \sim 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$ параметр $P_3 \ll 1$, так что влияние диффузии в электропроводности на динамику слоя пренебрежимо мало. Для дальнейших оценок выберем следующие, типичные для расплавов значения параметров [138, 139]: $\varepsilon \approx 2$, $\alpha_T \approx 10^{-3} \text{ В/К}$, $\kappa \approx 10^{-2} \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$, $\gamma_0 \approx 2 \cdot 10^3$, $c_p \approx 2 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$.

Тогда при $\delta T \sim 300 \text{ К}$ получаем $B \sim 1$ и критическое число Рэлея понижается примерно на 20%. При еще больших разностях температур в слое становится возможной неустойчивость, обусловленная только термоэлектрическими эффектами, которая может проявиться, например, в условиях невесомости $g = 0$. Критическое значение параметра B при этом равно

$$B_* = \frac{(k^2 + \pi^2 / 4)^2}{k^2}, \quad B_{*\min} = \pi^2 \quad (6.29)$$

Следует помнить, однако, что все сказанное справедливо лишь в том случае, когда отношение $\delta T / T_0$ мало, но так как средняя температура в расплавах может иметь значение $\sim 10^3 \text{ К}$, то разность температур в сотни градусов вполне достижима. Отметим также, что в земных условиях при подогреве снизу эффекты термо-ЭДС могут проявиться лишь в тонких слоях $10^{-5} \text{ см} \ll h < 10^{-2} \text{ см}$. Этот факт связан с тем обстоятельством, что число Рэлея пропорционально $\delta T h^3$ и критическое значение разности δT тем меньше, чем больше h , тогда как термоэлектрические эффекты существенны лишь при больших значениях δT .

Выше параметр B считался независимым параметром. Однако он пропорционален квадрату равновесного градиента температуры A^2 . Поэтому можно положить

$$B = R^2 b, \quad b = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \alpha_T^2 \nu \chi}{\gamma_0 g^2 \beta^2 h^6}. \quad (6.30)$$

В этом случае для определения критического числа Рэлея вместо (6.27) при $P_3 = 0$ имеем квадратное уравнение

$$M^2 b R^2 + R - R_0 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня, один из которых положителен, второй - отрицателен. Положительный корень есть критическое число Рэлея при подогреве снизу, отрицательный - при подогреве сверху

$$R_{1,2} = -\frac{1}{2M^2 b} \pm \sqrt{\frac{1}{4M^4 b^2} + \frac{R_0}{bM^2}}. \quad (6.31)$$

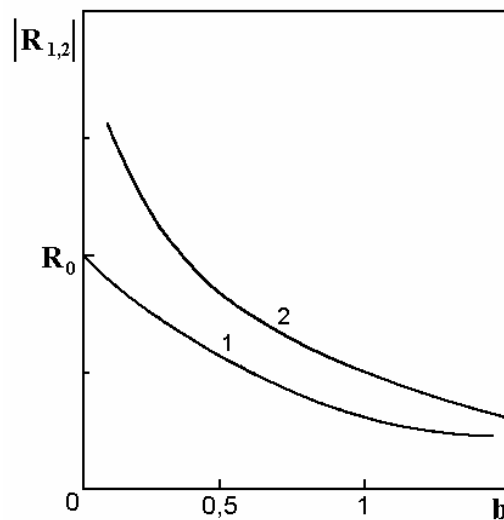


Рис. 6.3. Зависимости минимальных критических чисел Рэлея от безразмерного параметра термоэлектрического поля

При малых b критическое число Рэлея при подогреве снизу линейно убывает с ростом b . Графики зависимости $|R_{1,2}(b)|$ показаны на рис.6.3. Величина параметра b определяется толщиной слоя h (остальные параметры в b есть материальные константы). Причем $b \sim 1/h^6$ поэтому следует ожидать, что термоэлектрические эффекты могут оказаться весьма существенными лишь в относительно тонких слоях жидкости.

6.4. ВЛИЯНИЕ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ХАРАКТЕР ВЕТВЛЕНИЯ В РЕЖИМ СТАЦИОНАРНОЙ КОНВЕКЦИИ И КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛОПОТОК

Как известно, в обычной конвекции Рэлея-Бенара ветвление в режим стационарного конвективного движения происходит мягко, то есть в подкритической области $R < R_*$ стационарных движений нет, а при $R > R_*$ возникает стационарное движение, амплитуда которого растет по корневому закону: $a \sim \sqrt{R - R_*}$ [125].

В принципе, при наличии таких осложняющих факторов, как термоэлектрическое поле и кулоновское взаимодействие, ситуация может измениться. В частности, может оказаться, что возможен жесткий режим ветвления решения и существуют подкритические движения. Для выяснения этого вопроса необходимо решать задачу уже в нелинейной постановке. Используем метод малого параметра [125, 140].

Рассмотрим возникающее после потери устойчивости стационарное движение малой, но конечной амплитуды. Кривую ветвления решения на плоскости (R, a) вблизи $a = 0$ представим в форме

$$R = R_0 + aR_{11} + a^2R_{22} + a^3R_{33} + \dots \quad (6.32)$$

R_0 - первое критическое число Релея, a - вещественная амплитуда возмущений.

Запишем уравнения стационарной конвекции с учетом термоэлектрических эффектов, полученные в предыдущем параграфе. При этом по-прежнему будем считать толщину слоя жидкости намного превышающей дебаевский радиус. Пренебрежем также эффектами диффузии, считая $P_3 = 0$. Тогда в принятых предположениях получим

$$\begin{aligned} -\nabla p + \Delta \vec{v} + RT\vec{e}_0 - B\rho\vec{e}_0 &= -\frac{1}{P}(\vec{v}\nabla)\vec{v} - B\rho\vec{e}, & \vec{v}\vec{e}_0 + T &= \vec{v}\nabla T, \\ \operatorname{div}\vec{v} &= 0, & \rho - \Delta T &= -P_2\vec{v}\nabla\rho, & \operatorname{div}\vec{e} &= \rho, & \operatorname{rot}\vec{e} &= 0. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Сначала для простоты считаем B независимым параметром. Будем искать решение этой системы в виде рядов по малой амплитуде

$$X = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ T \\ P \\ \rho \\ \vec{e} \end{pmatrix} = aX_1 + a^2X^{(2)} + a^3X^{(3)} + \dots \quad (6.34)$$

Подставляя разложения (6.32) и (6.34) в систему (6.33), получим системы последовательных приближений. В первом порядке по a имеем

$$\begin{aligned} -\nabla p + \Delta \vec{v}_1 + R_0 T_1 \vec{e}_0 - B \rho_1 \vec{e}_0 &= 0, & \vec{v}_1 \vec{e}_0 + \Delta T_1 &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{v}_1 &= 0, & \rho_1 &= \Delta T_1, & \operatorname{div} \vec{e}_1 &= \rho_1, & \operatorname{rot} \vec{e}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Фактически эта система совпадает с использованной в разделе 6.3 (система (6.23)), если положить $\partial / \partial t = 0$, $P_3 = 0$. Для простоты, как и прежде, рассмотрим слой со свободными границами. Тогда в качестве решений задачи, сопряженной (6.35), можно выбрать

$$\begin{aligned} \vec{v}_1^+ &= \vec{v}_1, & T_1^+ &= (R_0 + B M_1^2) T_1 = \tilde{R}_0 T_1, & \rho_1^+ &= \rho_1 \tilde{R}_0, & \vec{e}_1^+ &= \tilde{R}_0 \vec{e}_1, & p_1^+ &= p_1, \\ M_1^2 &= (k^2 + \pi^2 / 4). \end{aligned}$$

Как обычно, решение, описывающее основное критическое движение, удовлетворяет условию нормировки

$$\int_V (\vec{v}_1 \vec{e}_0) T_1 dV \equiv \langle \vec{v}_1 \vec{e}_0 T_1 \rangle = 1.$$

(Обозначение подобных интегралов ломаными скобками сохраним и в дальнейшем). Кроме того, заметим, что во всех порядках ρ можно исключить из уравнения Навье-Стокса, используя уравнение

$$\rho^{(n)} = \Delta T^{(n)} - P_2 \sum_{j=1}^{n-1} \left(\vec{v}^{(j)} \nabla \rho^{(n-j)} \right).$$

Тогда для нахождения решений, соответствующих n -ому приближению достаточно решить неоднородные системы вида

$$-\nabla p^{(n)} + \Delta \vec{v}^{(n)} + R_0 T^{(n)} \vec{e}_0 - B \Delta T^{(n)} \vec{e}_0 = \vec{F}^{(n)}, \quad \vec{v}^{(n)} \vec{e}_0 + \Delta T^{(n)} = C_T^{(n)}, \quad (6.36)$$

$$\operatorname{div} \vec{v}^{(n)} = 0.$$

Здесь $\vec{F}^{(n)}$ и $C_T^{(n)}$ - правые части, содержащие слагаемые типа

$$(\vec{v}^{(k)} \nabla) \vec{v}^{(j)}, \quad \vec{v}^{(k)} \nabla T^{(j)}, \quad \rho^{(k)} \vec{e}^{(j)}, \quad \vec{v}^{(k)} \nabla \rho^{(j)}, \quad k + j = n.$$

Условия разрешимости систем (6.36) имеют вид

$$\langle \vec{F}^{(n)} \vec{v}_1 \rangle + \langle \tilde{R}_0 C_T^{(n)} T_1 \rangle = 0. \quad (6.37)$$

В частности, во втором порядке по a условие разрешимости получается следующим:

$$\begin{aligned} & -R_{11} \langle \vec{v}_1 \vec{e}_0 T_1 \rangle - \frac{1}{P} \langle \vec{v}_1 (\vec{v}_1 \nabla) \vec{v}_1 \rangle - B \langle \rho_1 \vec{e}_1 \vec{v}_1 \rangle - B P_2 \langle (\vec{v}_1 \nabla \rho_1) (\vec{v}_1 \vec{e}_0) \rangle + \\ & + \tilde{R}_0 \langle T_1 \vec{v}_1 \nabla T_1 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Второе и последнее слагаемые обращаются в нуль, как обычно [125]. Для вычисления слагаемых, пропорциональных B , используем соотношения

$$\vec{e}_1 = \nabla T_1, \quad \rho_1 = -M_1^2 T_1, \quad (\vec{v}_1 \vec{e}_0) = M_1^2 T_1.$$

После вычисления (6.38) получаем, что и слагаемые, пропорциональные B , также равны нулю. Таким образом, во втором порядке условие разрешимости дает $R_{11} = 0$. Теперь характер ветвления определяется знаком R_{22} . При $R_{22} > 0$ - мягкий режим, при $R_{22} < 0$ - жесткий. Решение неоднородных систем (6.36) будем искать в виде

$$X^{(n)} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix} X_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \begin{pmatrix} a_{nk} \\ b_{nk} \\ c_{nk} \\ d_{nk} \end{pmatrix} X_k. \quad (6.39)$$

Здесь $X_{1,k}$ собственные функции линейной задачи. Подставляя (6.39) в уравнения второго приближения, умножая на \vec{v}_k и T_k соответствующие уравнения и интегрируя, найдем

$$a_{2,k} = \frac{(\tilde{R}_0 + \tilde{B})h_{1k}}{\tilde{R}_k - \tilde{R}_0}, \quad b_{2k} = \frac{(\tilde{R}_k + \tilde{B})h_{1k}}{\tilde{R}_k - \tilde{R}_0}, \quad \tilde{B} = BP_2M_1^2M_k^2, \quad (6.40)$$

$$h_{1k} = \langle T_1 \vec{v}_1 \nabla T_k \rangle.$$

Поправка R_{22} определяется из условия разрешимости системы третьего приближения. После несложных, но громоздких вычислений находим

$$R_{22} = \tilde{R}_0 \sum_{k=2}^{\infty} b_{2k} h_{1k} + \tilde{B} \sum_{k=2}^{\infty} b_{2k} h_{1k} + B_2 h_{11}^2, \quad B_2 = BP_2^2, \quad h_{11}^2 = \langle (\vec{v}_1 \nabla \rho_1)^2 \rangle.$$

Подставляя в найденное выражение R_{22} коэффициенты b_{2k} из (6.40), окончательно получим

$$R_{22} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h_{1k}^2 (\tilde{R}_k + \tilde{B})(\tilde{R}_0 + \tilde{B})}{(\tilde{R}_k - \tilde{R}_0)} + B_2 h_{11}^2. \quad (6.41)$$

Поскольку всегда $\tilde{R}_k > \tilde{R}_0$, то $R_{22} > 0$ и мягкий режим ветвления сохраняется.

При заданном числе Рэлея R амплитуду стационарного движения с определенной точностью можно представить в виде (см. (6.32))

$$a = \left(\frac{R - R_0}{R_{22}} \right)^{1/2}, \quad R_0 = R_{00}(k) - BM_1^2, \quad R_{00}(k) = \tilde{R}_0 = (k^2 + \pi^2)^3 / k^2. \quad (6.42)$$

При фиксированных значениях R и k амплитуда есть функция параметра кулоновского взаимодействия B . Следовательно, функцией B является и средний конвективный теплопоток, определяемый выражением [125, 140]

$$\overline{W} \approx a^2 \langle \vec{v}_1 \vec{e}_0 T_1 \rangle = \frac{R - R_0}{R_{22}}. \quad (6.43)$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что $h_{11} = 0$, $h_{1k} = 0$,

$h_{1,2} = -\frac{3}{2}\pi$. Тогда для среднего конвективного теплопотока получаем

$$\overline{W} = \frac{((R - R_{00}) + BM_1^2)(R_{20} - R_{00})}{h_{12}^2 (R_{20} + BP_2M_1^2M_2^2)(R_{00} + BP_2M_1^2M_k^2)}. \quad (6.44)$$

При малых B зависимость $\overline{W}(B)$ линейна. Причем, существует критическое значение параметра P_2 такое, что при $P_2 < P_{2*}$ с ростом B растет и теплопоток, а при $P_2 > P_{2*}$ конвективный теплопоток с ростом B уменьшается (при фиксированном числе Рэлея, рис.6.4). Из условия $\left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial B}\right)_{B=0} = 0$ находим

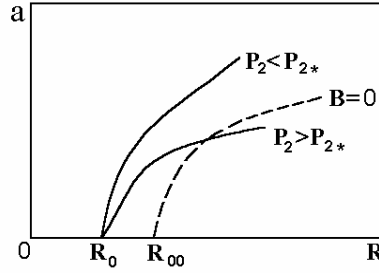


Рис. 6.4. Качественный вид кривых ветвления в режим стационарной конвекции

$$P_{2*} = \frac{R_{00} R_{20} h_{12}^2}{(R - R_{00})(R_{20} + R_{00}) M_2^2}. \quad (6.45)$$

Полученные результаты легко обобщаются на случай, когда R и B связаны соотношением $B = R^2 b$. Неравенство $R_{22} > 0$ при этом, как и следовало ожидать, сохраняется, а для \overline{W} и P_{2*} находим

$$\overline{W} = \frac{(\delta + b_1)(1 + 2b_1 R_{00})(r_{20} - 1)}{h_{12}^2 (r_{20} + b_1 R_{00} M_2^2 P_2) (1 + b_1 R_{00} P_2 M_2^2)},$$

$$P_{2*} = 2 + \frac{1}{R_{20} \delta}, \quad \delta = \frac{R - R_{00}}{R_{00}}, \quad b_1 = b_1 M_1^2, \quad r_{20} = \frac{R_{20}}{R_{00}}.$$

Таким образом, влияние термоэлектрического поля не изменяет характера ветвления в стационарный режим конвекции - он остается мягким, кроме того, по крайней мере для умеренных значений P_2 , термоэлектрическое поле способствует увеличению конвективного теплопотока через слой.

6.5. ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ДВОЙНОГО СЛОЯ НА КОНВЕКТИВНУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим теперь влияние электрического поля двойного слоя на устойчивость равновесия плоского горизонтального слоя неравномерно нагретой жидкости [160].

Впервые такая задача была рассмотрена в [83], однако жидкость считалась настолько слабопроводящей, что время релаксации объемного заряда было много больше характерного гидродинамического времени. (Приближение замороженного заряда). В настоящей работе электропроводность считается произвольной, при этом результат [83] получается как частный случай.

Рассмотрим плоский горизонтальный слой вязкой несжимаемой жидкости, который нагревается снизу.

Будем считать, что разделение зарядов в объеме жидкости происходит в результате специфической адсорбции одного из сортов ионов на твердых границах слоя. Термоэлектрическим полем пренебрежем. По-видимому, это возможно, если $\psi_0 \gg \alpha_T A h$, где ψ_0 - адсорбционный потенциал, α_T - дифференциальная термо-ЭДС, $A = |\nabla T_0|$.

В простейшем случае бинарного электролита система уравнений, описывающих стационарное равновесие, совпадает с (6.10). Условия для определения постоянных интегрирования запишем в виде

$$T_0(\pm h) = T_{00} \mp A h = T_{1,2}, \quad A = \frac{T_1 - T_2}{2h} > 0, \quad \varphi_0(\pm h) = \pm \psi_0, \quad (6.46)$$

$$\int_{-h}^h \rho_0(z) dz = 0, \quad \int_{-h}^h q_{10}(z) dz = 2q_0 h.$$

Последнее условие означает задание степени диссоциации или электропроводности жидкости. Предполагая, как и прежде, что $\delta T / T_{00} \ll 1$, $e_+ \psi_0 / k T_{00} \ll 1$, а также $b_{1,2} = e_+ D_{1,2} / k T_{00}$ и не учитывая эффектов термо-ЭДС, получим следующие распределения равновесных величин:

$$\varphi_0(z) = \frac{\psi_0 \operatorname{sh} \Gamma z}{2 \operatorname{sh} \Gamma}, \quad T_0 = -A h z, \quad \rho_0 = -\frac{\varepsilon \psi_0}{2 r^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \Gamma z}{\operatorname{sh} \Gamma}, \quad E_0 = -\frac{\psi_0}{2 r} \cdot \frac{\operatorname{ch} \Gamma z}{\operatorname{sh} \Gamma}, \quad (6.47)$$

$$\Gamma \equiv \frac{h}{r}, \quad -1 \leq z \leq 1.$$

Рассмотрим теперь поведение малых возмущений. Для этого запишем линеаризованные уравнения Навье-Стокса, теплопроводности, законы сохранения зарядов и уравнения для электрического поля в виде

$$\gamma_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} - \gamma_0 \beta T \vec{g} + \rho_0 \vec{e} + \rho \vec{E}_0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \nabla T_0 = \chi \Delta T,$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial q_1}{\partial t} + \vec{v} \nabla q_{10} = -\operatorname{div}(b_1 q_0 \vec{e} - D_1 \nabla q_1),$$
(6.48)

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} + \vec{v} \nabla q_{20} = -\operatorname{div}(b_2 q_0 \vec{e} - D_2 \nabla q_2), \quad \operatorname{div} \vec{e} = (q_1 + q_2) / \varepsilon_0 \varepsilon, \quad \vec{e} = -\nabla \phi,$$

$$\rho = q_1 + q_2.$$

Полученную систему можно упростить, объединив уравнения законов сохранения q_1 и q_2 в один для избыточного объемного заряда ρ . Полагая $D_1 \approx D_2 = D$, будем иметь

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho_0 = -\operatorname{div}(\sigma_0 \vec{e} - D \nabla \rho), \quad \sigma_0 = q_0(b_1 + b_2).$$
(6.49)

Обезразмерим уравнения, выбрав в качестве единиц длины - h - полуширину слоя, температуры - $A h$, скорости - χ / h , времени - h^2 / ν , поля - ψ_0 / h , заряда - $\varepsilon \psi_0 / h^2$, потенциала - ψ_0 . Кроме того, дважды применим операцию rot к уравнению Навье-Стокса и спроецируем полученное выражение на ось z . Полагая все возмущения пропорциональными $\exp\{-\lambda t + i k_x x + i k_y y\}$, для их амплитуд получим

$$-\lambda \Delta v_z = \Delta^2 v_z - R k^2 T - B \left(e_0 k^2 \rho + \frac{d\rho_0}{dz} k^2 \phi \right), \quad -P \lambda T - v_z = \Delta T,$$
(6.50)

$$-\lambda \rho + P_2 \rho - P_3 \Delta \rho + P^{-1} v_z \frac{d\rho_0}{dz} = 0, \quad \Delta \phi = -\rho, \quad e_0 = \Gamma \frac{\operatorname{ch} \Gamma z}{\operatorname{sh} \Gamma},$$

$$\frac{d\rho_0}{dz} = \Gamma^3 \frac{\operatorname{ch} \Gamma z}{\operatorname{sh} \Gamma}, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad \Delta = \frac{d^2}{dz^2} - k^2,$$

$$B = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \psi_0^2}{\eta \chi}, \quad P = \frac{\nu}{\chi}, \quad P_2 = \frac{\sigma_0 h^2}{\nu \varepsilon_0 \varepsilon}, \quad P_3 = \frac{\sigma_0 h^2}{D \varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Если в качестве ψ_0 выбрать значение ζ -потенциала на границе твердая стенка - жидкость, а плоскости $z = \pm 1$ совместить с плоскостями скольжения, то граничные условия к системе (6.50) можно записать в виде

$$v_z = v_z'' = T = \rho = 0; \quad z = \pm 1.$$

Так же, как и в [83], подставим в систему (6.50) вместо e_0 и $\frac{d\rho_0}{dz}$ их средние значения

$$\langle e_0 \rangle = 1, \quad \left\langle \frac{d\rho_0}{dz} \right\rangle = \Gamma^2. \quad (6.51)$$

(Разумеется, при больших значениях Γ операция усреднения становится некорректной, т.к. $\left\langle \frac{d\rho_0}{dz} \right\rangle$ начинает сильно отличаться от значений $\frac{d\rho_0}{dz}$ внутри слоя). С учетом (6.51) рассматриваемая задача имеет точное решение. Требование его нетривиальности приводит к следующему дисперсионному соотношению для декремента λ :

$$\begin{aligned} a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d &= 0, \quad a = -PM^2, \quad M^2 = k^2 + \pi^2/4, \\ b &= M^2(P P_4 + PM^2 + M^2), \quad c = Rk^2 - M^6 P_4 P - P_4 M^4 - PB_1 k^2, \\ d &= M^6 P_4 - Rk^2 P_4 + B_1 k^2 M^2, \quad P_4 = P_2 + P_3 M^2, \quad B_1 = B\Gamma^2 P_2. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Рассмотрим сначала устойчивость относительно монотонных возмущений. Положив в (6.52) $\lambda = 0$, получим для критического числа Рэлея

$$R_1 = R_0 + B_1 \frac{M^2}{P_4}, \quad R_0 = \frac{M^6}{k^2}. \quad (6.53)$$

R_0 - критическое число Рэлея в отсутствии двойного слоя. Видно, что наличие двойного слоя всегда стабилизирует равновесие. Для нейтральных колебательных возмущений нужно положить $\lambda = i\omega$, тогда найдем

$$\omega^2 = \frac{P_5 k^2 (R_1 - R_2)}{M^2 (P P_5 + P + 1)}, \quad R_2 = R_0 + R_0 P_5 (P_5 P + P + 1) + \frac{B_1 P^2 (P_5 + 1)}{P + 1}, \quad (6.54)$$

$$P_5 = P_4 / M^2.$$

Пренебрегая электропроводностью и диффузией $P_5 = 0$, получим результат [83]

$$\omega^2 = B_1 \frac{k^2}{(P + 1) M^2}, \quad R_2 = R_0 + B_1 \frac{P^2}{P + 1}. \quad (6.55)$$

По смыслу $\omega^2 \geq 0$, поэтому всегда должно быть $R_2 \leq R_1$. Последнее неравенство приводит к необходимому условию, только при выполнении которого колебательная устойчивость возможна: $P < 1 / P_5$. Фактически это условие означает, что время релаксации объемного заряда должно быть достаточно большим (в работе [83] – предел бесконечно большого). При выполнении необходимого условия колебательная неустойчивость реализуется при таких значениях электрического поля двойного слоя, что

$$B_1 \geq R_0 \frac{P_5^2 (1 + P)}{(1 - P P_5)} = B_1^*. \quad (6.56)$$

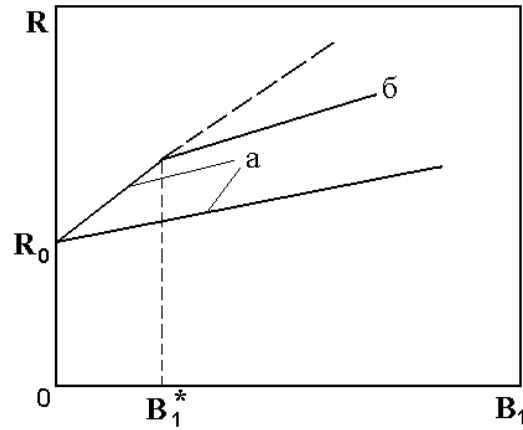


Рис. 6.5. Качественный вид границ областей монотонной «а» и колебательной «б» неустойчивостей

Диаграмма областей устойчивости в координатах R и B_1 представлена на рис.6.5, а - границы устойчивости по отношению к монотонным возмущениям, б - граница устойчивости по отношению к колебательным возмущениям при

$P < 1/P_5$ (области неустойчивости выше прямых). Видно, что если колебательная неустойчивость возможна, то она более опасна.

Заметим, что полученные результаты по форме весьма напоминает результаты исследования конвективной устойчивости равновесия хорошо проводящей жидкости в магнитном поле [125].

Приведем некоторые оценки.

Для дистиллированной воды примем: $D \approx 10^{-5}$ см²/с, $\chi \approx 10^{-2}$ см²/с, $\nu \approx 10^{-2}$ см²/с, $\sigma_0 \approx 10^{-6}$ Ом⁻¹·см⁻¹, $\epsilon \approx 80$, $\psi_0 \approx 10$ мВ, $h \approx 10^{-2}$ см, $\Gamma \approx 10^2$. Тогда получим: $P_5 \approx 10^2$ при $k_{\min} \approx \pi^2/4$. Тем самым колебательная неустойчивость невозможна. Смещение границы монотонной неустойчивости по числу Рэлея определяется величиной B_1/P_5 . Вычисляя, получим: $B_1/P_5 \approx 10$. Таким образом, имеем эффект стабилизации, то есть увеличение критического числа Рэлея на 20%.

В заключение этого параграфа упомянем работу [141], в которой экспериментально наблюдался эффект уменьшения интенсивности тепловой конвекции в электрическом поле. Гравитационная тепловая конвекция возникала в жидкости около тонкой (менее миллиметра) проволоочки, которая одновременно служила электродом. Поскольку диаметр проволоочки был порядка размеров двойного слоя, то эффект стабилизации мог проявиться при условии, что внешнее поле в пределах двойного слоя не превышает собственного поля двойного слоя (оно может достигать значений ~ 1 кВ/см).

6.6. О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ, ОБУСЛОВЛЕННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ И ДВОЙНОГО СЛОЯ

Взаимодействие электрического поля двойного слоя и термоэлектрического поля может привести к возникновению сдвиговых напряжений и специфического движения в жидкости [154].

Действительно, пусть в жидкости вдоль плоской твердой границы имеется градиент температуры. Тогда вдоль границы имеется эквивалентное поле термо-ЭДС напряженностью $E_\tau = \alpha_T |\nabla T|$. Кроме того, перпендикулярно твердой стенке в жидкости имеется поле двойного слоя E_n . Таким образом, вблизи стенки существует сдвиговая компонента максвелловского тензора напряжений $T_{n\tau} = \varepsilon_0 \varepsilon E_n E_\tau$, под действием которого может сформироваться сдвиговое течение. Произведем расчет параметров такого течения.

Как известно, в жидкости вблизи твердой стенки имеется объемно заряженная область - диффузионная часть двойного электрического слоя. Если вдоль стенки поддерживается градиент концентрации электролита, то возникнет движение жидкости относительно стенки, так называемое явление капиллярного осмоса и диффузиофореза [142]. Аналогичное явление должно иметь место и при наличии градиента температуры в однородной по составу жидкости. Рассмотрим это явление подробнее.

Предположим, что жидкость содержит два сорта ионов, имеющих разные коэффициенты диффузии, термодиффузии и подвижности, соответственно $D_{1,2}$, $K_{1,2}$, $b_{1,2} > 0$. В жидкости, параллельно плоской твердой границе, поддерживается постоянный градиент температуры. Будем считать, что величина и направление градиента таковы, что тепловая конвекция отсутствует (например, подогрев сверху).

В установившемся режиме ток каждого сорта ионов постоянен и равен термодиффузионному потоку ионов

$$\vec{j}_1 = -q_1 \frac{K_1}{T} \nabla T, \quad \vec{j}_2 = -q_2 \frac{K_2}{T} \nabla T, \quad (6.57)$$

$q_{1,2}$ - плотности положительных и отрицательных зарядов в жидкости. Здесь, вообще говоря, имеется в виду квазистационарный режим в том смысле, что распределение температуры уже стационарно, как и диффузное распределение зарядов поперек слоя, но разделение зарядов вдоль стенки еще не произошло.

Заметим, что время установления диффузионного равновесия (т.е. время разделения зарядов и возникновения электрического поля термо-ЭДС) порядка $\tau_D \sim h^2 / D$, тогда как теплового - $\tau_T \sim h^2 / \chi$ и при $D \ll \chi$ имеем $\tau_T \ll \tau_D$.

Плотности сил, действующих на положительные и отрицательные заряды, соответственно равны $\vec{f}_i = q_i \vec{E}$ или

$$\vec{f}_1 = \vec{j}_1 / b_1, \quad \vec{f}_2 = \vec{j}_2 / b_2. \quad (6.58)$$

Плотность результирующей силы, действующей на жидкость, равна

$$\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = -\frac{\nabla T}{T_0} \left(\frac{q_1 K_1}{b_1} - \frac{q_2 K_2}{b_2} \right). \quad (6.59)$$

В приближении Дебая-Хюккеля распределения зарядов в направлении перпендикулярном стенке в двойном слое имеют вид [143, 144]

$$q_{1,2} = \pm q_0 - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \zeta}{2r^2} e^{-\frac{z}{r}}, \quad r = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon k T_0}{2e_+ q_0}}. \quad (6.60)$$

Здесь ζ - дзета-потенциал, q_0 - плотность положительных и отрицательных зарядов в нейтральной жидкости, ось z направлена перпендикулярно твердой границе, а ее начало совпадает с плоскостью скольжения жидкости относительно стенки. Подставляя (6.60) в (6.59), получим

$$\vec{f} = -\frac{q_0}{T_0} \left(\frac{K_1 b_1 + K_2 b_2}{b_1 b_2} \right) \nabla T + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \zeta \alpha_T \nabla T}{r^2} e^{-\frac{z}{r}}. \quad (6.61)$$

$\alpha_T = \frac{q_0 r^2}{\varepsilon_0 \varepsilon T_0} \left(\frac{K_1}{D_1} - \frac{K_2}{D_2} \right)$ - как и прежде эффективное значение дифференциальной термо-ЭДС жидкости. Первое слагаемое в выражении для силы постоянно и представляет собой градиент термоосмотического давления. В замкнутом объеме эта часть силы не может вызвать движения жидкости, а лишь переопределяет гидростатическое давление. Второе слагаемое может привести к возникновению течения и в замкнутом объеме.

Найдем распределение скоростей вблизи стенки, обусловленное неоднородной частью силы. Дважды интегрируя уравнение Навье-Стокса, при

условии, что вдали от стенки движения нет, а пристеночное движение плоскопараллельное, получим

$$v_x(z) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \zeta \alpha_T |\nabla T|}{\eta} e^{-\frac{z}{r}} \quad (6.62)$$

(ось x направлена вдоль стенки, ось z - перпендикулярно стенке). Наибольшее значение скорости достигается на плоскости скольжения и равно

$$v_m = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \zeta \alpha_T |\nabla T|}{\eta}. \quad (6.63)$$

Заметим, что полученная формула (6.63) аналогична формуле для электроосмотического течения электролита во внешнем электрическом поле [144].

Оценки для случая

$$\varepsilon = 10, \quad \alpha_T = 10^{-3} \text{ В/К}, \quad |\nabla T| = 10 \text{ К/см}, \quad \zeta = 20 \text{ мВ}, \quad \eta = 10^{-2} \text{ Па}\cdot\text{с}$$

приводят к значению $v_m \approx 10^{-6} \text{ см/с}$.

Наличие неоднородной части силы (6.61) приводит к тому, что вблизи стенки формируются сдвиговые напряжения. Найдем компоненту τ_{xz} тензора сдвиговых напряжений (в нашем случае отлична от нуля только эта компонента)

$$\tau_{xz} = \int_0^\infty f_x(z) dz = \frac{\alpha \zeta |\nabla T|}{r}. \quad (6.64)$$

Оценки для значений параметров, указанных выше, и $r \approx 10^{-4} \text{ см}$ дают

$$\tau_{xz} \approx 10^{-3} \text{ Дин/см}^2.$$

Величина напряжения оказывается, в принципе, достаточной, чтобы существенно повлиять на характер возникновения конвекции в некоторых экспериментах [145].

В заключение отметим, что рассмотренная выше температурная поляризация двойного слоя может также служить причиной движения твердых частиц в жидкости (термоэлектрофорез).

6. 7. ТЕРМОЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Выше рассматривалась задача об устойчивости равновесия подогреваемого слоя жидкости с учетом кулоновских сил, создаваемых термоэлектрическим полем. Однако, возможны такие ситуации, когда равновесие невозможно, и в жидкости при наличии $\nabla T_0 \neq 0$ сразу возникает движение. Конвективные движения, обусловленные силой тяжести при неvertикальном ∇T_0 , хорошо известны и изучены [125]. Рассмотрим подобное конвективное течение, возникающее в результате, действия одних только кулоновских сил.

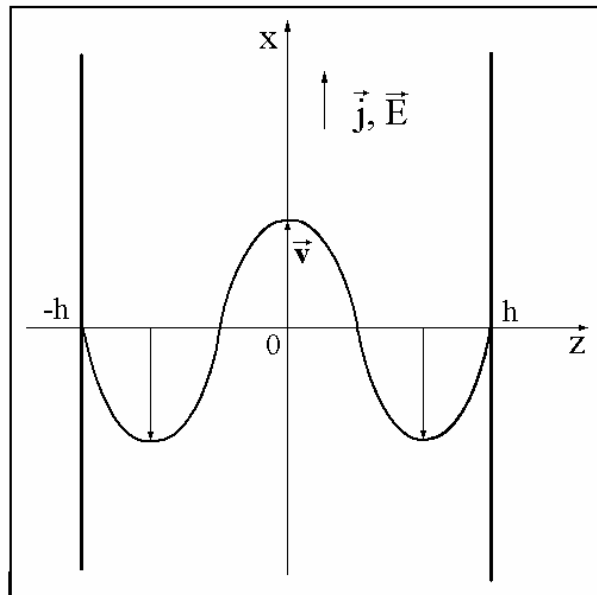


Рис. 6.6. Термоэлектродинамическое течение жидкости в плоском канале

Пусть в жидкости, находящейся в длинном плоскопараллельном канале в условиях невесомости $g = 0$, течет ток (рис.6.6). Предположим, что внешнего разогрева нет и стенки канала поддерживаются при постоянной температуре T_{00} . Учитывая джоулев разогрев жидкости и используя систему уравнений (6.23) в размерной форме, при $R = 0$ и $P_3 = 0$ (диффузией зарядов пренебрегаем) в стационарном режиме получим

$$\begin{aligned} \gamma_0(\vec{v}\nabla)\vec{v} &= -\nabla p + \eta\Delta\vec{v} + \rho\vec{E}, \quad \text{div}\vec{v} = 0, \quad \vec{v}\nabla T = \chi\Delta T + \frac{1}{\gamma_0 c_p} \vec{j}\vec{E}, \\ \vec{v}\nabla\rho &= -\text{div}\vec{j}, \quad \vec{j} = \sigma(\vec{E} - \alpha_T\nabla T), \quad \text{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0\varepsilon, \quad \text{rot}\vec{E} = 0, \\ \sigma &= \sigma(T), \quad \alpha_T = \text{const}. \end{aligned} \quad (6.65)$$

Предположим, что в стационарном режиме распределение всех величин удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \{v(z), 0, 0\}, \quad T = T(z), \quad p = p(x), \quad j_z = 0, \\ \rho &= \rho(z), \quad \vec{E} = \{E_0, 0, E_z(z)\}. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Поле E_0 определяется внешней разностью потенциалов и сопротивлением слоя.

С учетом (6.66) система уравнений (6.65) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \eta \frac{d^2 v}{dz^2} + \rho E_0 = c_1, \quad \frac{d^2 T}{dz^2} = \frac{\sigma E_0^2}{\kappa}, \\ \sigma &= \sigma_0 \left(1 + S \frac{T - T_{00}}{T_{00}} \right), \quad \rho = \alpha_T \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d^2 T}{dz^2}. \end{aligned} \quad (6.67)$$

c_1 - постоянная разделения переменных. Будем считать, что температура на стенках поддерживается постоянной T_{00} , а скорость обращается в нуль. Кроме того, поток будем считать замкнутым. Тогда к (6.67) имеем следующие условия:

$$T(z = \pm h) = T_{00}, \quad v(z = \pm h) = 0, \quad \int_{-h}^h v dz = 0. \quad (6.68)$$

Считая параметр S малым, будем искать решение уравнений (6.67) в виде рядов по S

$$\begin{pmatrix} \vec{v} \\ T \\ p \end{pmatrix} = X = X_0 + SX_1 + S^2 X_2 + \dots$$

Ограничиваясь первым порядком по S , для интересующих нас величин найдем

$$T_1'' = -\frac{\sigma_0 E_0^2}{\kappa T_{00}} T_0, \quad T_0 = T_{00} + \frac{\sigma_0 E_0^2 h^2}{2\kappa} \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right), \quad \rho_0 = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon \sigma_0 E_0^2 \alpha}{2\kappa}, \quad (6.69)$$

$$\rho_1 = \frac{\alpha_T \varepsilon_0 \varepsilon S \sigma_0 E_0^2}{\kappa T_{00}} T_0, \quad v_0 = 0, \quad v_1 = \frac{\alpha_T \varepsilon_0 \varepsilon S \sigma_0^2 E_0^5 h^4}{120 \kappa^2 \eta T_{00}} \left[1 - \frac{6z^2}{h^2} + \frac{5z^4}{h^4}\right].$$

Полученный профиль скорости изображен на рис.6.6.

Интересным является тот факт, что характер конвективного течения в данном случае полностью повторяет характер конвективного течения жидкости, обусловленного внутренними источниками тепла в поле тяжести [125]. Оценим максимальную скорость жидкости, выбирая следующие значения параметров: $\alpha_T = 10^{-3}$ В/К; $\varepsilon = 10$; $S = 0,1$; $\sigma_0 = 10^{-4}$ Ом $^{-1}$ ·м $^{-1}$; $E_0 = 10^4$ В/м; $h = 0,1$ м, $T_0 = 10^2$ К; $\kappa = 10^{-1}$ Вт/м·К; $\eta = 10^{-3}$ Па·с. Подставляя их в (6.69), получим $v_{1\max} \approx 10^{-3}$ см/с.

Как видно, скорость получается небольшой, однако при увеличении напряженности поля всего на порядок ($E_0 \sim 1$ кВ/см, удельная мощность, диссипируемая в системе $W \sim 1$ Вт/см 3) будем иметь $v_{\max} \sim 1$ м/с.

6.8. ТЕРМОМАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

Известно, что взаимодействие термоэлектрического тока и внешнего магнитного поля приводит к насосному эффекту [137, 146]. Поскольку силы Лоренца могут быть и вихревыми, то возможно вихревое термомагнитогидродинамическое движение и в замкнутом объеме.

С прикладной точки зрения представляет интерес рассмотреть ТМГД течение, например, проводящего расплава в зазоре между двумя коаксиальными цилиндрами, один из которых нагрет до более высокой температуры. При этом в радиальном направлении генерируется термоэлектрический ток, если к тому же имеется внешнее осевое магнитное поле, то возможно движение расплава [166].

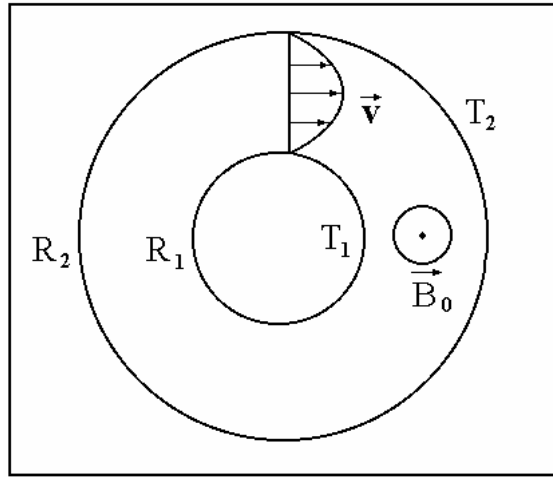


Рис. 6.7. Геометрия канала и направление магнитного поля

Подобная ситуация может иметь место, например, в теплообменниках ядерных реакторов с теплоносителем [135, 136], при выращивании кристаллов в условиях невесомости из расплава методом плавающей зоны, при стабилизации зоны внешним магнитным полем [147] и других технологических процессах.

В отличие от [137], где рассматривалось плоскопараллельное течение, рассмотрим проводящий расплав, который находится в зазоре между двумя коаксиальными цилиндрами радиусов R_1 , R_2 нагретыми до разных температур

T_1 и T_2 (рис.6.7). Предположим, что эта разность температур, поддерживаемая внешними, по отношению к жидкости, источниками тепла, намного превышает характерный перепад температур, обусловленный эффектами Джоуля и Томсона. Для исключения эффектов, связанных с естественной конвекцией, будем считать, что система находится в условиях невесомости $g = 0$.

Используя систему (6.6)-(6.9) и учитывая сделанные предположения, для описания стационарного движения жидкости имеем уравнения

$$\gamma_0(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\nabla p + \eta\Delta\vec{v} + \frac{1}{\mu_0\mu}\text{rot}\vec{B} \times \vec{B}, \quad \vec{v}\nabla T = \chi\Delta T, \quad \text{div}\vec{v} = 0, \quad (6.70)$$

$$\text{rot} \vec{B} = -\mu_0 \mu \sigma \alpha_T \nabla T + \mu_0 \mu \sigma (\vec{v} \times \vec{B}), \quad \text{div} \vec{B} = 0.$$

Индукцию магнитного поля представим в виде $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$. Здесь \vec{B}_0 индукция однородного внешнего поля, \vec{b} - индуцированного. Обезразмерим систему (7.70), выбрав в качестве единиц длины - R_1 внешнего поля - B_0 , индуцированного поля - $\mu_0 \mu j_T A = \alpha \mu_0 \mu \sigma \delta T$, температуры - $\delta T = (T_1 - T_2) / \ln(R_2 / R_1)$, скорости - $B_0 R_1 / \mu_0 \mu \eta$, единицы давления подбираются так, чтобы коэффициент при ∇p был равен единице. В безразмерной форме система (6.70) получается следующей:

$$\begin{aligned} P_1 (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= -\nabla p + \Delta \vec{v} + \varepsilon \text{rot} \vec{b} \times \vec{b}_0 + \varepsilon^2 \text{rot} \vec{b} \times \vec{b}, & P_2 \vec{v} \nabla T &= \Delta T, \\ \varepsilon \text{rot} \vec{b} &= -\varepsilon \nabla T + H^2 a \left[(\vec{v} \times \vec{b}_0) + \varepsilon (\vec{v} \times \vec{b}) \right], & \text{div} \vec{v} &= 0. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Здесь

$$P_1 = \frac{B_0^2 R_1^2}{\mu_0^2 \mu^2 v \eta}, \quad P_2 = \frac{B_0^2 R_1^2}{\mu_0^2 \mu^2 \chi \eta}, \quad \varepsilon = \frac{\alpha_T \sigma \mu_0 \mu \delta T}{B_0}.$$

$Ha = \frac{B_0 R_1 \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\eta}}$ - число Гартмана, ε - отношение индукции индуцированного поля к индукции внешнего. Будем считать ε малым параметром и отыскивать решение (6.71) в виде рядов по ε

$$\vec{v} = \varepsilon \vec{v}_1 + \varepsilon^2 \vec{v}_2 + \dots, \quad T = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \dots, \quad \vec{b} = \vec{b}_1 + \varepsilon \vec{b}_2 + \varepsilon^2 \vec{b}_3 + \dots,$$

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots$$

В нулевом приближении по ε имеем

$$\vec{v}_0 = 0, \quad \nabla T_0 = -\frac{\vec{r}}{r}, \quad p_0 = \text{const}.$$

В первом порядке по ε получим систему

$$\begin{aligned} \nabla p_1 &= \Delta \vec{v}_1 + \text{rot} \vec{b}_1 \times \vec{b}_0, & \text{div} \vec{v}_1 &= 0, & P_2 \vec{v}_1 \nabla T_0 &= \Delta T_1, \\ \text{rot} \vec{b}_1 &= -\nabla T_0 + H^2 a \left[\vec{v}_1 \times \vec{b}_0 \right]. \end{aligned} \quad (6.72)$$

Ограничиваясь первым порядком малости по ε , найдем решение системы (6.72).

В качестве граничных условий выберем следующие:

$$\bar{v}_1(r=1) = \bar{v}_1(r=\lambda) = 0, \quad \lambda \equiv \frac{R_2}{R_1}, \quad T_1(r=1) = T_1(r=\lambda) = 0. \quad (6.73)$$

Предположим, что конфигурация течения, внешнего поля b_0 и градиента давления такова, что в цилиндрической системе координат

$$\bar{v}_1 = \{0, 0, v_\phi(r)\}, \quad \bar{b}_0 = \{0, 1, 0\}, \quad p_1 = p_1(r).$$

Тогда вместо (6.72) получаем

$$\frac{d^2 v_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_1}{dr} - \frac{v_1}{r^2} - H^2 a v_1 = -\frac{1}{r}, \quad \frac{dp_1}{dr} = \frac{v_1^2}{r}, \quad T_1 = 0. \quad (6.74)$$

Второе и третье из уравнений (6.74) нас интересоваться не будут, а первое заменой $x = Ha \cdot r$ приведем к виду

$$v_{1xx}'' + \frac{1}{x} v_{1x}' - \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) v_1 = -\frac{1}{Ha^2 x}.$$

Полученное уравнение есть неоднородное уравнение Бесселя, его решение можно записать в виде [148, 149]

$$v_1 = c_1 I_1(rHa) + c_2 K_1(rHa) + \frac{1}{Har}.$$

Здесь I_1 , K_1 - модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда.

Определяя из граничных условий для скорости постоянные c_1 и c_2 , запишем окончательное решение в форме

$$v(r) = \frac{\varepsilon}{H^2 a} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\lambda(M-N)} \left(\frac{I_1(rHa)}{I_1(Ha)} (\lambda M - 1) - \frac{K_1(rHa)}{K_1(Ha)} (\lambda N - 1) \right) \right], \quad (6.75)$$

$$M = \frac{K_1(\lambda Ha)}{K_1(Ha)}, \quad N = \frac{I_1(\lambda Ha)}{I_1(Ha)}.$$

Выражая скорость в размерных единицах, получим

$$v(r) = \left(\frac{\alpha_T \delta T \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\eta}} \right) F(Ha, \lambda, r) = v_0 F. \quad (6.76)$$

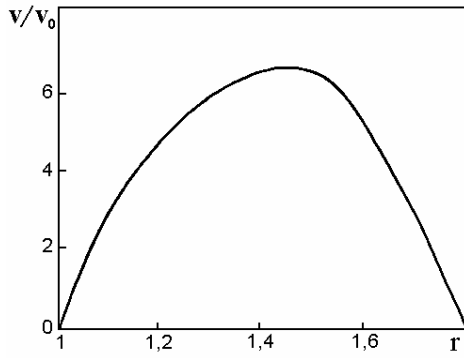


Рис. 6.8. Профиль скорости в зазоре между коаксиальными цилиндрами

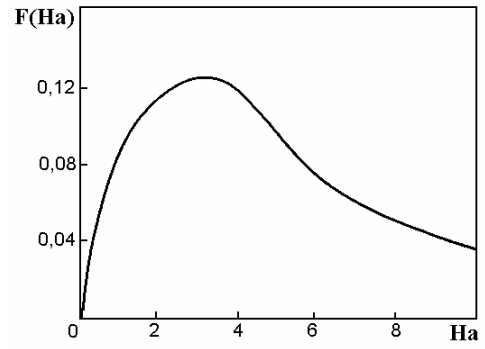


Рис. 6.9. Зависимость максимальной скорости течения от числа Гартмана

Здесь в качестве F обозначено выражение в квадратных скобках в (6.75), деленное на число Гартмана. На рис.6.8 для примера изображен профиль скорости в относительных единицах при

$$Ha=1, \quad \lambda=2, \quad v_0 = \frac{\alpha_T \delta T \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\eta}}. \quad (6.77)$$

На рис.6.9 изображена функция $F(Ha)$ при $r=1,5$; $\lambda=2$.

Видно, что зависимость скорости потока в срединном сечении от магнитной индукции (числа Гартмана) имеет максимум. С физической точки зрения это понятно. Действительно, магнитное поле в данном случае играет двойную роль. С одной стороны, произведение $\vec{j}_{термо} \times \vec{B}_0$ - есть пондеромоторная, движущая сила, тогда как произведение $(\vec{v} \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_0$, представляет собой силу, препятствующую движению.

Максимально достижимое значение скорости, определяемое при $Ha=3$, $\alpha_T = 10^{-4}$ В/К, $\sigma = 10^2$ Ом $^{-1}$ ·м $^{-1}$; $\eta = 10^{-2}$ Па·с, $\delta T = 10^2$ К, $R_1 \sim 1$ см, равно

$$v_{max} \approx 0,128 v_0 \approx 4 \text{ м/с}.$$

Отметим, что подобного рода течение жидкого полупроводника наблюдалось экспериментально в работе [150].

Рассмотренное течение фактически представляет собой квазистационарное течение. В этом режиме плотность термоэлектрического тока определяется только градиентом температуры в объеме жидкости и ее дифференциальной термо-ЭДС. Как уже отмечалось, такой режим существует в течение

характерного диффузионного времени порядка $\tau_D \sim h^2 / D$. В электрически замкнутой цепи достигается стационарное состояние, в котором полный ток в объеме жидкости равен замыкающему току через стенки канала. В этом случае термоэлектрический ток в объеме жидкости \vec{j}_T , вообще говоря, не равен $-\alpha_T \nabla T$, а определяется разностью дифференциальных термо-ЭДС жидкости и проводящей стенки [137]. Для определения скорости v_0 при этом имеем условия

$$hj_T = -h_m j_m, \quad \frac{j_T}{\sigma} - \frac{j_m}{\sigma_m} = (\alpha_{Tm} - \alpha_T) \left(\frac{dT_0}{dr} \right)_{r=R_1} = L \frac{\delta T}{R_1}, \quad v_0 = \frac{j_T R_1}{\sqrt{\sigma \eta}}. \quad (6.78)$$

Здесь индекс m относится к проводящему массиву, окружающему жидкость с торцов цилиндров, посредством которого замыкаются линии тока. L - абсолютная дифференциальная термо-ЭДС термопары жидкость-массив, h , h_m - осевой размер жидкости и массива. Решая совместно уравнения (6.78), найдем, что в этом случае, в отличие от (6.77)

$$v_0 = \frac{L \delta T \sqrt{\sigma}}{\left(1 + \frac{h \sigma}{h_m \sigma_m} \right) \sqrt{\eta}}. \quad (6.79)$$

Заметим, что $h \sigma / h_m \sigma_m$ - фактически представляет собой отношение полных электрических сопротивлений массива и жидкости.

Таким образом, в рамках сформулированной постановки задачи термоэлектрические эффекты весьма существенны и их следует учитывать в соответствующих экспериментах и технологических процессах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение сделаем следующие выводы.

По первой главе. При рассмотрении устойчивости равновесия плоской горизонтальной границы раздела жидкостей, обладающих конечной проводимостью, во внешнем электрическом поле, ориентированном нормально

или по касательной к границе, в линейной по амплитуде возмущений постановке получены полные дисперсионные соотношения. Приведены соотношения для пороговых значений напряженности поля для возникновения неустойчивости по отношению к монотонным возмущениям. Методом малого параметра и численно установлена возможность и определены параметры колебательной неустойчивости в нормальном и касательном поле. Найдено, что необходимыми условиями возникновения колебательной неустойчивости являются: во-первых, близость времен релаксации заряда в жидкостях и характерного гидродинамического времени, равного обратной частоте гравитационно-капиллярных волн; во-вторых, между параметрами жидкостей должны существовать определенные соотношения типа $\sigma_2 / \sigma_1 > \varepsilon_2 / \varepsilon_1 > \gamma_1 / \gamma_2$ для случая касательного поля. Оба этих условия обеспечивают фазовые соотношения, при которых поле раскачивает колебания, а не демпфирует их.

В нелинейной по амплитуде возмущений постановке исследован характер возникновения статического рельефа границы раздела жидкостей (монотонная неустойчивость) в нормальном электрическом поле. Установлено, что как для диэлектрических жидкостей, так и для проводящей поверхности существует единое условие смены мягкого режима ветвления жестким. Таким условием является достаточно большая величина относительного скачка электрического давления при переходе через границу раздела.

Основываясь на теории ЭГД неустойчивости границы раздела жидкостей, произведены расчеты критического теплового потока и отрывного диаметра пузыря для случая кризиса кипения жидкости на проволочке во внешнем электрическом поле. Найдено, что с увеличением напряженности поля отрывной диаметр пузырей уменьшается, а критический теплоток растет. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными результатами других авторов демонстрирует удовлетворительное согласие.

По второй главе. Проведено численное интегрирование уравнения баланса давлений (уравнение типа Юнга-Лапласа) на поверхности диэлектрической

капли жидкости в однородном внешнем поле с учетом стрикционного давления. В результате оказалось, что форма капли близка к вытянутому эллипсоиду вращения и не зависит от стрикционного эффекта (стрикционное слагаемое дает лишь вклад в давление внутри капли). Найден предел устойчивости равновесной формы капли.

Методом минимизации потенциальной энергии найдено, что у любой капли с $\varepsilon > 20$ существуют две ветви устойчивых эллипсоидальных форм, между которыми возможны жесткие переходы с гистерезисом. Аналогичным методом получено, что и у проводящей заряженной капли во внешнем электрическом поле также могут существовать две ветви устойчивых форм, одна из которых сфера, а вторая эллипсоид, если напряженность внешнего поля и заряд капли удовлетворяют условиям

$$\frac{\varepsilon_0 E^2 R_0}{4\alpha} < 0,0045, \quad \frac{kq^2}{16\pi\alpha R_0^3} > 0,80.$$

В противном случае устойчивых эллипсоидальных форм не существует. Найдено, что на верхних ветвях эллипсоидальных форм капель коэффициенты усиления каплями внешнего поля могут достигать значения 100 и более. Последнее обстоятельство возможно ответственно за инициирование молниевых разрядов в атмосфере.

При исследовании равновесных форм наэлектризованных пузырей установлено, что во внешнем электрическом поле все эллипсоидальные формы незаряженных пузырей устойчивы (в смысле существования минимума энергии), тогда как у заряженных пузырей имеет место ветвление равновесных форм, подобно заряженным каплям. Эффекты сжимаемости приводят к тому, что при деформациях наэлектризованные пузыри увеличивают свой объем.

Предложена теория стримерного кавитационного электрического пробоя в жидкости. Согласно теории сферическая форма кавитационного пузыря, возникающего в жидкости в результате действия электрического давления, на определенном этапе роста становится неустойчивой по отношению к

возмущениям типа сферических гармоник с большим n , которые и обеспечивают последующий рост стримеров. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными результатами других авторов демонстрируют удовлетворительное согласие.

По третьей главе. Предложен новый индукционный механизм зарядки капель электричеством, согласно которому проводящая капля, неоднородно испаряясь во внешнем электрическом поле в непроводящей среде, теряет преимущественно ионы одного знака и приобретает заряд другого знака. Получено уравнение кинетики зарядки капли. Расчет по этому уравнению максимального заряда капли в режиме пленочного кипения дает $0,71 \leq q_m / 12\pi\epsilon_0 E_0 R^2 \leq 1$, в режиме конвективно-диффузионного испарения $0,17 \leq q_m / 12\pi\epsilon_0 E_0 R^2 \leq 1$, а время зарядки оказывается менее секунды.

Численное моделирование процесса падения и зарядки капли в атмосфере, проведенное на основе предложенного феноменологического уравнения кинетики зарядки, показало возможность левитации капель. Анализ возможности одновременной выполнимости условий устойчивости равновесия капли и ее левитации приводит к ограничению на радиус R капель (для воды $R < 3,1$ мм).

Проведены эксперименты, в которых наблюдалась зарядка капель в режиме пленочного кипения, их левитация и взлет вверх в электрическом поле.

Предложенный механизм позволяет объяснить также обнаруженный экспериментально в атмосфере зеркальный эффект Симпсона: при изменении направления напряженности электрического поля атмосферы на противоположное заряд капель дождя также меняет знак.

Рассчитаны сила, энергия и напряженности поля двух заряженных близко расположенных капель совместно падающих в атмосфере. Найдено, что одноименно заряженные проводящие сферические частицы (капли) разных радиусов могут притягиваться друг к другу. Исключение составляет случай, когда заряды частиц относятся как квадраты их радиусов - в этом случае они

всегда отталкиваются. Если к тому же равны радиусы частиц, то сила отталкивания на близких расстояниях между ними асимптотически стремится к 0,616 величины силы, рассчитанной в кулоновском приближении, а энергия - к 0,885. Эти результаты универсальны и автомодельны. Для случая противоположно заряженных одинаковых шаров на близких расстояниях между ними найдена асимптотическая формула для силы взаимодействия,

которая имеет вид
$$\frac{F_r}{F_K} = -\frac{4}{(r-1)\{\ln[2/(r-1)]+1\}^2}, \quad F_K - \text{величина}$$

максимальной силы, вычисленной в кулоновском приближении, $r = l/2R$, l - расстояние между центрами шаров.

В случае притяжения одноименно заряженных капель они могут коагулировать, образуя каплю, при определенных условиях неустойчивую по Рэлею. Определены параметры капель, при которых этот эффект возможен. Установлено также, что из двух конкурирующих сценариев взаимодействия противоположно заряженных капель - искрового пробоя и неустойчивости их по Тейлору, более предпочтителен второй.

По четвертой главе. Предложена новая модель шаровой молнии, согласно которой ШМ это пузырь с электрически заряженной оболочкой из расплавленного (или затвердевшего) металла или силиката, вокруг которого происходит реакция горения. В результате неустойчивости сферического равновесия заряженного пузыря его поверхность может быть рифленой. Такой пузырь может возникнуть вблизи места удара линейной молнии при протекании индукционного тока, с последующей кавитацией расплавленного металла. Поставлена и решена задача о росте и теплообмене такого пузыря. Численные расчеты показали, что при заряде на оболочке $q = 1,6 \cdot 10^{-6}$ Кл пузырь вырастает до радиуса $R = 2,1$ см за время порядка долей микросекунд, однако температура его быстро падает и если не начнется реакция горения на его поверхности, то рост может прекратиться на стадии зародыша.

Визуально и фотографически исследованы разрушения деревянных опор линий электропередач (Удмуртия) и телефонной (Пермская область) вызванные, предположительно, шаровой молнией. На основе этих наблюдений предложена теория электротеплового взрыва, согласно которой разрушение опор происходит вследствие взрывного вскипания столбиков воды в микротрещинах столба при прохождении через них импульса тока (подобно взрывающимся проволочкам). Предложенная теория позволила рассчитать энергию и мощность событий (следовательно и ШМ), которые составили около 9 кДж и 16 кВт соответственно.

На основании результатов теории электротеплового взрыва введено понятие взрывного релаксационного процесса. Найдено, что необходимым условием возникновения такого процесса в жидкости является условие

$$\frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_0^2}{c_T \gamma T_0} > \frac{1}{\beta_p}, \quad \beta_p \equiv -\frac{T_0}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{t=0}.$$

E_0 - начальная напряженность поля вблизи электрода.

По пятой главе. Проведен анализ двух основных механизмов проводимости и зарядообразования в жидкостях: инжекционного и механизма, связанного с температурной зависимостью собственной (омической) электропроводности. Показано, что омическая модель электропроводности применима, если в жидкости имеется достаточно большое количество диссоциирующих молекул, образующих фоновый заряд разных знаков, величина плотности которого много больше плотности образовавшегося избыточного заряда, кроме того толщина слоя жидкости должна быть больше толщины диффузного двойного слоя.

Показано, что в рамках омической модели проводимости и зарядообразования принцип монотонности возмущений нарушается для плоских слоев жидкости и выполняется в случае цилиндрической или сферической геометрии электродов.

Дано обоснование безындукционному ЭГД приближению, согласно которому при некоторых условиях можно пренебречь полем индуцированного в жидкости объемного заряда по сравнению с внешним полем. Показано, что это возможно, когда зависимость омической электропроводности от температуры слабая, либо при униполярной проводимости слабая инжекция. Описанные выше исследования позволили обосновать и записать уравнения электроконвекции для омической модели проводимости.

Поставлены и решены задачи о конвективной устойчивости равновесия плоского вертикального слоя слабопроводящей жидкости в различно ориентированных электрических полях по отношению к пространственным и плоским возмущениям. Для случая модельной задачи об устойчивости слоя со свободными границами получены точные решения. Найдено, что электрическое поле понижает порог устойчивости при подогреве снизу и делает возможной неустойчивость при подогреве сверху. Наиболее опасные возмущения колебательные, представляющие собой волны, бегущие параллельно границам слоя. В случае конечного времени релаксации заряда при подогреве сверху спектр возмущений, срывающих устойчивость, ограничен сверху и существует пороговое значения поля, ниже которого равновесие при подогреве сверху устойчиво при любых величинах подогрева.

Численно решена задача об устойчивости равновесия горизонтального слоя слабопроводящей жидкости в вертикальном электрическом поле, представляющая практический интерес. Показана возможность колебательной неустойчивости как при подогреве сверху, так и снизу. По аналогии с колебательной неустойчивостью границы раздела жидкостей (гл.1) неустойчивость при подогреве сверху имеет длинноволновый характер так, что спектр неустойчивых возмущений ограничен снизу по длине волны. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными и теоретическими результатами других авторов демонстрирует удовлетворительное согласие.

По шестой главе. Используя феноменологические уравнения стационарной диффузии и термодиффузии, обоснованы и получены уравнения электрогидродинамики с учетом термоэлектрических эффектов и эффектов диффузионного двойного слоя. Найденные распределения поля и заряда в плоской ячейке с учетом упомянутых эффектов имеют погранслоевой характер.

Установлено, что термоэлектрическое поле дестабилизирует конвективную устойчивость равновесия жидкости, не меняя при этом мягкий характер ветвления в режим стационарной конвекции.

Электрическое поле двойного слоя, наоборот, стабилизирует равновесие, повышая критическое число Релея, однако делает возможной колебательную неустойчивость.

Термодиффузионные электрические поля и токи могут приводить к специфическим ползущим течениям жидкости в условиях невесомости. Найденны профили и характерные величины скоростей термоэлектрогидродинамического течения жидкости в плоском слое и термомагнитогидродинамического течения между коаксиальными цилиндрами.

Таким образом, исследования показали, что рассмотренные в этой главе слабые в обычных условиях эффекты следует учитывать при планировании и проведении экспериментов, а также при теоретических расчетах в экстремальных условиях: в невесомости, при больших градиентах температур, в тонких слоях жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Остроумов Г.А. Взаимодействие электрических и гидродинамических полей: Физические основы электрогидродинамики. М.: Наука, 1979. 319 с.

2. Zhakin A.I. Electrohydrodynamics: Basic concepts, problems and application. Kursk: Univ. Press, 1996. 132 p.
3. Болога М.К., Гросу Ф.П., Кожухарь И.А. Электроконвекция и теплообмен. Кишинев: Штиинца, 1977. 320 с.
4. Болога М.К., Смирнов Г.Ф., Дидковский А.Б., Климов С.М. Теплообмен при кипении и конденсации в электрическом поле. Кишинев: Штиинца. 1987. 239 с.
5. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 318 с.
6. Брискман В.А., Саранин В.А. О возможности управления процессами тепломассообмена в условиях невесомости с помощью электрического поля// Гидродинамика и тепломассообмен в невесомости. М.: Наука, 1982. С.147-154.
7. Рубашов И.Б., Бортников Ю.С. Электрогазодинамика. М.: Атомиздат, 1971. 167 с.
8. Ватажин А.Б., Грабовский В.И., Лихтер В.А., Шульгин В.И. Электрогазодинамические течения. М.: Наука, 1983. 344 с.
9. Стишков Ю.К., Остапенко А.А. Электродинамические течения в жидких диэлектриках. Л.: Изд-во ЛГУ, 1989. 172 с.
10. Верещага А.Н., Тарунин Е.Л. Расчет эффективности электрогидродинамического насоса (механизм инъекции)// Моделирование в механике. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1989. Т.3(20). С.111-115.
11. Коженков В.И., Фукс Н.А. Электрогидродинамическое распыление жидкости// Успехи химии. 1976. Т.45. N 12. С.2274-2284.
12. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Святченко А.А. Классификация режимов работы электрогидродинамических источников жидко-капельных пучков. Препринт N 25. Институт микроэлектроники. Ярославль, 1993. 118 с.

13. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей (обзор)// Изв. РАН. МЖГ. 1994. N 3. С.3-22.
14. Основы электродинамики дисперсных систем/ Под ред. И.П. Верещагина. М.: Энергия, 1974. 480 с.
15. Мейсон Б.Дж. Физика облаков. Л.: Гидрометеиздат, 1961. 542 с. 319 с.
16. Шишкин Н.С. Облака, осадки и грозовое электричество. М.: ГИТТЛ, 1954. 362 с.
17. Мучник В.М., Фишман Б.Е. Электризация грубодисперсных аэрозолей в атмосфере. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 207 с.
18. Мучник В.М. Физика грозы. Л.: Гидрометеиздат, 1974. 351 с.
19. Чалмерс Дж.А. Атмосферное электричество. Л.: Гидрометеиздат, 1974. 420 с.
20. Леонов Р.А. Загадка шаровой молнии. М.: Наука, 1965. 75 с.
21. Стаханов И.П. Физическая природа шаровой молнии. М.: Атомиздат, 1979. 240 с.
22. Стаханов И.П. О физической природе шаровой молнии. М.: Энергоатомиздат, 1985. 208 с.
23. Смирнов Б.М. Проблема шаровой молнии. М.: Наука, 1988. 208 с.
24. Сканапи Г.И. Физика диэлектриков(область сильных полей). М.: Физматгиз, 1958. 907с.
25. Балыгин И.Е. Электрическая прочность жидких диэлектриков. М.-Л.: Энергия, 1964. 227 с.
26. Льюис Т. Электрическая прочность и проводимость жидких диэлектриков в сильных полях// Прогресс в области диэлектриков. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1962. С.128-204.
27. Наугольных К.А., Рой Н.А. Электрические разряды в воде. М.: Наука, 1971. 155 с.

28. Оборудование и технологические процессы с использованием электрогидравлического эффекта/ Под ред. Г.А.Гулого. М.: Машиностроение, 1977. 320 с.
29. Ушаков В.Я. Импульсный электрический пробой жидкостей. Томск: Томский ун-т, 1975.
30. Горьков Л.П., Черникова Д.И. О режиме развития неустойчивости заряженной поверхности гелия// ДАН СССР. 1976. Т.228. N 4. С. 829-832.
31. Блинов Л.М. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. М.: Наука, 1978. 384 с.
32. Tonks L. Theory of liquid surface rupture by a uniform electric field// Phys. Rev. 1935. Vol.48. P.562.
33. Френкель Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме// ЖЭТФ. 1936. Т.6. В.4. С. 347-350.
34. Melcher J.R. Electrohydrodynamic and magnetohydrodynamic surface waves and instabilities// Phys. Fluids. 1961. Vol.4. N 11. P.1348-1354.
35. Melcher J.R. Field-coupled surface waves. M.I.T. Press. Cambridge, 1963. 190 p.
36. Melcher J.R., Smith Ch.V. Electrohydrodynamic charge relaxation and interfacial perpendicular-field instability// Phys. Fluids. 1969. Vol.12. N 4. P.778-790.
37. Melcher J.R., Schwarz W.J. Interfacial relaxation overstability in tangential electric field// Phys.Fluid. 1968. Vol.11. N 12. P.2604-2616.
38. Мелчер Дж., Тейлор Дж. Электрогидродинамика: обзор роли межфазных касательных напряжений// Механика: Периодический сборник переводов иностранных статей. М.: Мир, 1971. N 5. С.66-99.
39. Мелчер Дж. Электрогидродинамика// Магнитная гидродинамика. 1974. N 2. С.3-30.

40. Зайцев В.М., Шлиомис М.И. Характер неустойчивости поверхности раздела двух жидкостей в постоянном поле// ДАН СССР. 1969. Т. 188. N 6. С.1261-1262.
41. Кузнецов Е.А., Спектор М.Д. О существовании гексагонального рельефа на поверхности жидкого диэлектрика во внешнем электрическом поле// ЖЭТФ. 1976. Т.71. N 1. С.262-271.
42. Блум Э.Я., Майоров М.М., Цеберс А.О. Магнитные жидкости. Рига: Зинатне, 1989. 386 с.
43. Бабой Н.Ф., Болога М.К., Ключанов А.А. Некоторые особенности процесса кипения в электрическом поле// Электронная обработка материалов. 1968. N 2(20). С.50-57.
44. Дидковский А.Б., Болога М.К. О критической напряженности поля в условиях пленочной конденсации// Электронная обработка материалов. 1980. N 3. С.50-52.
45. Johnson R.Z. Effect of an electric field on boiling heat transfer// AIAA Journal. 1968. Vol.6. N 8. P.1456-1460.
46. Jones T.B., Schaeffer R.C. Electrohydrodynamically coupled minimum film boiling in dielectric liquids// AIAA Journal. 1976. Vol.14. N 12. P.1759-1765.
47. Rayleigh. On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity. Phylosophical Magazin. 1882. Vol.14. P.184-186.
48. Taylor G.J. Disintegration of water drops in an electric field// Proc. Roy. Soc. 1964. Vol.A280. P.383-397.
49. Basaran O.A., Scriven L.E. Axisymmetric shapes and stability of charged drops in an external electric field// Phys. Fluids.A. 1989. Vol.1. N 5. P.799-809.
50. Коробейников С.М. О роли пузырьков в электрическом пробое жидкостей// ТБТ. 1998. Т.36. N 3. С.362-367.
51. Garton C.G., Krasucki Z. Bubbles in insulating liquids: stability in an electric field// Proc. Roy. Soc. London. A. 1964. Vol.280. N 1381. P.211-226.

52. Cheng K.J., Chaddock J.B. Deformation and stability of drops and bubbles in an electric field// Phys. Letters. 1984. Vol.106A. N 1,2. P.51-53.
53. Шикин В.Б. Многоэлектронные пузырьки в жидком гелии// Письма в ЖЭТФ. 1978. Т.27. Вып.1. С.44-47.
54. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Святченко А.А., Лазарянц А.Э. Расчет капиллярных колебаний и устойчивости сильно заряженной капли. Препринт N 26. Институт микроэлектроники РАН. Ярославль, 1993. 35 с.
55. Watson P.K. Electrostatic and hydrodynamic effects in the electrical breakdown of liquid dielectrics// IEEE Trans. on Electr. Insul. 1985. Vol.2. N 2. P.395-399; 8-th Intern. Conf. Conduct. and breakdown dielec. liquids. Pavia, 1984.
56. Смирнов Б.М. Наблюдательные свойства шаровой молнии// УФН. 1992. Т.162. N 8. С.43-81.
57. Сенкевич О.А. Долгоживущие плазменные образования и проблемы шаровой молнии. Часть 1// ТВТ. 1997. Т.35. N 4. С.651-664.
58. Сенкевич О.А. Долгоживущие плазменные образования и проблемы шаровой молнии. Часть 2// ТВТ. 1997. Т.35. N 6. С.968-982.
59. Апфельбаум М.С., Полянский В.А. Об образовании объемного заряда в слабопроводящих средах// Магнитная гидродинамика. 1982. N 1. С.71-76.
60. Апфельбаум М.С., Янтовский Е.И. О силе действующей на игольчатый электрод, и вызываемых ею течениях// Магнитная гидродинамика. 1977. N 4. С.73-80.
61. Апфельбаум М.С., Янтовский Е.И. О насосном действии тонкого высоковольтного электрода в слабопроводящей жидкости// ЖТФ. 1980. Т.50. N 7. С.1511-1520.
62. Верещага А.Н. Численные исследования электроконвекции в слабопроводящих жидкостях с различными физическими свойствами: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. Пермь, 1990. 16 с.

63. Жакин А.И. Электрогидродинамическая неустойчивость слабопроводящей жидкости, расположенной между сферическими электродами при наличии слабой инжекции// ПМТФ. 1979. N 5. С.44-48.
64. Atten P. Electrohydrodynamic stability of dielectric liquids during transient regime of space-charge-limited injection// Phys. Fluids. 1974. Vol.17. N 10. P.1822-1827.
65. Richardson A.T. The linear instability of a dielectric liquid contained in a cylindrical annulus and subjected to unipolar charge injection// Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1980. Vol.33. Part 3. P.277-292.
66. Worraker W.J., Richardson A.T. A nonlinear electrodynamic stability of a thermally stabilized plane layer of dielectric liquid// J. Fluid Mech. 1981. Vol.109. P.217-237.
67. Lacroix J.C., Atten P. Electro-convection in a dielectric liquid layer subjected to unipolar injection// J. Fluid Mech. 1975. Vol.69. Part 3. P.539-563.
68. Жакин А.И. Редокс-системы в электрогидродинамике и расчет электроконвективных течений// Магнитная гидродинамика. 1982. N 2. С.70-78.
69. Жакин А.И. Электрогидродинамика жидких диэлектриков на основе диссоционно-инжекционной модели проводимости// Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. N 4. С.3-14.
70. Jones T.B. Electrohydrodynamically enhanced heat transfer// Int. heat transfer. 1980. Vol.14. P.107-148.
71. Turnbull R.J. Effect of dielectrophoretic forces on the Benard instability// Phys. Fluids/ 1969. Vol.12. N 9. P.1809-1814.
72. Turnbull R.J. Electroconvective instability with a stabilizing temperature gradient. I. Theory// Phys. Fluids. 1968. Vol.11. N 12. P.2588-2596.
73. Turnbull R.J. Electroconvective instability with a stabilizing temperature gradient. II. Experimental results// Phys. Fluids. 1968. Vol.11. N 12. P.2597-2603.

74. Lee Ch. Oh. Thermal instability of a slightly conducting liquid layer in vertical electric field// Heat transfer. Proc. 5-th Int. heat transfer confer. Tokyo. 1974. Vol.3. P.173-177.
75. Takashima M., Aldridge K.D. The stability of a horizontal layer of dielectric fluid under vertical dc electric field and a vertical temperature gradient// Quart.J. Mech and Appl. Math. 1976. Vol.29. N 1. P.71-87.
76. Kim K., Kim Ch.S., Lee Ch.Oh. Electrohydrodynamic bulk instability of a slightly conducting fluid between two coaxial cylinders with a small temperature gradient// J.Phys. Soc. Jap. 1970. Vol.29. N 6. P.1625-1634.
77. Жакин А.И., Тарапов И.Е., Федоненко А.И. Экспериментальные исследования ЭГД-неустойчивости и электроконвекции в цилиндрических конденсаторах// Магнитная гидродинамика. 1981. N 4. С.139-142.
78. Косвинцев С.Р. Экспериментальное исследование электроконвективной неустойчивости неоднородно нагретой слабопроводящей жидкости: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Пермь. 1993. 131 с.
79. Иоффе И.В., Эйдельман Е.Д. Особенности конвекции в тонких слоях электролита// Письма в ЖТФ. 1978. Т.4. Вып.4. С.193-196.
80. Эйдельман Е.Д. Термоэлектрическая конвекция в горизонтальном слое жидкости// ЖЭТФ. 1993. Т.104. N 9(3). С.3058.
81. Эйдельман Е.Д. Возбуждение электрической неустойчивости нагреванием// УФН. 1995. Т.165. С.1279-1294.
82. Эйдельман Е.Д. Электроконвекция в горизонтальном слое проводящей жидкости из-за нагревания. Постановка задачи и возбуждение в тонких слоях// ТВТ. 1998. Т.36. N 5. С.799-803.
83. Huberman B.A., Streifer W. Hydrodynamic instability in coulomb fluids// Phys. Rev. 1977. Vol.48. P.599-602.

84. Гогосов В.В., Полянский В.А. Электродинамика: задачи и приложения основные уравнения, разрывные решения// Итоги науки и техники: Механика жидкости и газа. 1976. Т.10. С.5-85.
85. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1984. 535 с.
86. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 538 с.
87. Бriskман В.А., Шайдуров Г.Ф. Механизмы неустойчивости поверхности жидкости в постоянном и переменном электрическом поле// Гидродинамика: Уч. зап. Пермского ун-та. Вып.2. 1970. С.229-240
88. Шаров М.Т. Устойчивость равновесия поверхности жидкости в электрическом поле: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Пермь, 1988. 16 с.
89. Воронин В.П. Действие статического вертикального электрического поля на распространение волн по поверхности жидкости// Вестник московского университета. 1973. N 6. С.655-661.
90. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. Новосибирск: Наука, 1970. 659 с.
91. Несис Е.И. Кипение жидкостей. М.: Наука, 1973. 380 с.
92. Линард Дж., Вонг П. Минимальный тепловой поток и длина доминирующей волны неустойчивых возмущений при пленочном кипении на горизонтальном цилиндре// Теплопередача. 1964. N 2. С.107-112.
93. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
94. Гидромеханика невесомости/ Под редакцией А.Д. Мышкиса. М.: Наука, 1976. 504 с.
95. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И. Равновесная форма заряженной капли в электрическом и гравитационном полях// ЖТФ. 1989. Т. 59. N 6. С.27-34.
96. Копченкова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. М.: Наука, 1972. 367 с.

97. Macky W.A. Some investigations on the deformation and breacing of water drops in strong electric field// Proc. Roy. Soc. London. 1931. Vol.A133. N 822. P.565-587.
98. Ailam Q., Gallily J. Stability of an electrically charged droplet// Physic Fluids. 1962. V. 5. N 2. P. 575-582.
99. Григорьев А.И. О механизме неустойчивости заряженной проводящей капли// ЖТФ. 1985. Т.55. В.7. С.1272-1278.
100. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.2. М.: Наука, 1984. 560 с.
101. Справочник химика. Т. 1. М.-Л.: Гостехиздат хим. лит-ры, 1962. С. 937.
102. Гупало Ю.П., Полянин А.Д., Рязанцев Ю.С. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. М.: Наука, 1985. 336 с.
103. Фукс Н.И. Испарение и рост капель в газообразной среде. М.: Из-во АН СССР, 1958. 90 с.
104. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. М.: Наука, 1971. 536 с.
105. Davis M.H. Two charged spherical conductors in a uniform electric field strength// Quart. Journ. Mech. and Applied Maht. 1964. Vol.17. Pt.4. P.499-511.
106. Ким В.М. Влияние зарядов на коагуляцию капель существенно различных размеров// Труды Института экспериментальной метеорологии. М.: Гидрометеиздат, 1989. Вып. 48 (138). С.29-34.
107. Ochs H.T, Czys R.R. Charge effects on the coalescence of water drops in free fall// Nature. 1987. Vol.327. 18 june. P.606-608.
108. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: Из-во иностранной лит-ры, 1954. 604 с.
109. Миролубов М.В. и др. Методы расчета электростатических полей. М.: Высшая школа, 1963. 415 с.
110. Говорков В.А. Электрические и магнитные поля. М.: Энергия, 1968. 487 с.

111. Бейтуганов М.Н. Об обуславливаемых сильными электрическими полями физических явлениях в облаках// Метеорология и гидрология. 1989. N 9. С. 42-48.
112. Капица П.Л. О природе шаровой молнии// ДАН СССР. 1955. Т.101. N 2. С.245.
113. Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. М.: Наука, 1991. 134 с.
114. Корум К.Л., Корум Дж.Ф. Эксперименты по созданию шаровой молнии при помощи высокочастотного разряда и электрохимические фрактальные кластеры// УФН. 1990. Т.160. Вып.4. С.47-58.
115. Korshunov V.K. Drift motion of the magnetic monopole of Pjakov-'t Hooft in the air and the 'Ball-lightning' phenomenon// Modern Physics Letters A. 1990. Vol.5. No.21. P.1629-1631.
116. Литвинов Е.А., Месяц Г.А., Проскуровский Д.И. Автоэмиссионные и взрывоэмиссионные процессы при вакуумных разрядах// УФН. 1983. Т.139. Вып.2. С.265-302.
117. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Из-во Иркутского ун-та, 1990. 225 с.
118. Дмитриев М.Т., Липатов А.И., Григорьев А.И. Новые данные о свойствах шаровых молний. Томск, 1981. 21 с.- Деп в ВИНТИ 07.12.81, N 5717.
119. Тарасов Л.В. Физика в природе. М.: Просвещение, 1988. 307 с.
120. Пудовкин А.К. Шаровая молния в Новосибирском Академгородке// УФН. 1996. Т.166. N 11. С.1253-1254.
121. Электрический взрыв проводников / Под ред. А.А.Рухадзе и И.С.Шпигеля. М.: Мир, 1965. 360 с.
122. Кривицкий Е.В. Динамика электровзрыва в жидкости. Киев: Наукова думка, 1986. 205 с.
123. Справочное руководство по древесине/ Пер. с английского Я.П. Горелика и Т.В. Михайловой. М.: Лесная промышленность, 1979. 544 с.
124. Богомоллов А.И., Михайлов К.А. Гидравлика. М.: Стройиздат, 1972.

125. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
126. Стишков Ю.К., Остапенко А.А., Рычков Ю.М. Объемный заряд и ЭГД течения в симметричной системе электродов// Электронная обработка материалов. 1982. N 1. С.59-61.
127. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527с.
128. Стишков Ю.К., Остапенко А.А. Два режима ЭГД-течений и конвективная проводимость// Магнитная гидродинамика. 1979. N 4. С.46-52.
129. Жакин А.И. Некоторые вопросы электрогидродинамической устойчивости и электроконвекции слабопроводящих жидкостей: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Харьков, 1980. 136 с.
130. Адамчевский И. Электрическая проводимость жидких диэлектриков. Л.: Энергия, 1972. 295с.
131. Брановер Г.Г., Цинобер А.Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М.: Наука, 1970. 295 с.
132. Шерклиф Дж. Курс магнитной гидродинамики. М.: Мир, 1967. 320 с.
133. Бирих Р.В., Рудаков Р.Н. Применение метода ортогонализации в пошаговом интегрировании при исследовании устойчивости конвективных течений// Гидродинамика: Сб. науч. тр. Пермского ун-та. Вып. 5. Пермь, 1974. С.149-158.
134. Де Грот С., Мазур П. Неравновесная гидродинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
135. Кирко И.М., Кирко Г.Е. О возможности наблюдения новых МГД-явлений в объеме жидкого металла первого контура блока БН-600 Белоярской атомной электростанции// ДАН СССР. 1979. Т.246. N 3. С.593-596.
136. Кирко И.М., Митенков Ф.М., Баранников В.А. и др. Наблюдение МГД явлений в объеме жидкого металла первого контура БН-600 Белоярской атомной электростанции// ДАН СССР. 1981. Т.257. N 4. С.861-863

137. Shercliff J.A. Thermoelctric magnetohydrodynamics// J.Fluid Mech. 1979. Vol.91. P.231-251.
138. Справочник по расплавленным солям/ Перевод с англ. Т.1. Л.: Химия, 1971. 167 с.
139. Справочник по электрохимии/ Под ред. А.М. Сухотина. Л.:Химия, 1981. 488 с.
140. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
141. Coelho R., Vanderschueren H. Anomalous electroconvection in weakly conducting liquids// J.of Appl. Phys. 1977. Vol.48. N 11. P.4700-4705.
142. Духин С.С., Дерягин Б.В. Электрофорез. М.: Наука, 1976. 328 с.
143. Антропов Л.И. Теоретическая электрохимия. М.: Высшая школа, 1975. 568 с.
144. Шелудко А. Коллоидная химия. М.: Иностранная лит-ра, 1960. 332 с.
145. Глухов А.Ф., Путин Г.Ф. О возникновении конвекции в ячейке Хеле-Шоу// Конвективные течения: Сб. науч. тр. Пермского пед. ин-та. Вып. 1. Пермь, 1979. С.19-24.
146. Черкасский А.Х. Термоэлектрический насос. М.: Машиностроение, 1971. 216 с.
147. Авдудевский В. С., Полежаев В. И. Меаника невесомости и космическая технология// Будущее науки. М.: Наука, 1982. С.96-112.
148. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
149. Грей Э., Метьюз Г.Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: Иностранная литература, 1953. 371 с.
150. Горбунов Л. А. Влияние термоэлектромагнитной конвекции на процесс получения объемных монокристаллов из полупроводниковых расплавов в постоянном магнитном поле// Магнитная гидродинамика. 1987. N 4. С.65-69.

151. Брискман В.А., Саранин В.А. Колебательная неустойчивость границы раздела жидкостей в постоянном электрическом поле// Тез. докл. 8-го Рижского совещания по магнитной гидродинамике. Рига, 1975. С. 161-163.
152. Саранин В.А. О конвективной устойчивости слабопроводящей жидкости в электрическом поле// Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1976. N 5. С.16-23.
153. Саранин В.А. О конвективной устойчивости слабопроводящей жидкости в электрическом поле по отношению к трехмерным возмущениям// Гидродинамика: Республиканский сборник. Вып.10. Пермь. 1977. С.54-65.
154. Саранин В.А. О влиянии двойного электрического слоя на возникновение конвекции в тонких ячейках// Тез. докл. Уральской зональной конференции молодых ученых и специалистов. Пермь, 1980. С.12-14.
155. Саранин В.А. О безындукционном приближении в электрогидродинамике// Конвективные течения: Уч. зап. Пермского пединститута. 1981, Пермь. С.130-133.
156. Саранин В.А., Черепанов А.А., Шайдуров Г.Ф., Шаров М.Т. Управление устойчивостью равновесия стратифицированных жидкостей с помощью электрических и магнитных полей// Аннот. докл. 5-го Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Алма-Ата, 1981. С.314.
157. Саранин В.А. Конвекция, обусловленная термоЭДС в условиях микрогравитации// Тез. докл. 2-го Всесоюзного семинара по гидродинамике и теплообмену в невесомости. Пермь, 1981. С. 55-56.
158. Саранин В.А. Влияние электрического поля термо-ЭДС на возникновение конвекции в ионных расплавах// Магнитная гидродинамика. 1983. N 1. С.85-89.
159. Саранин В.А. Об устойчивости равновесия плоского горизонтального слоя неоднородно нагретой жидкости в электрическом поле// Конвективные течения: Сб. научных трудов. Пермь, 1983. С.46-52.

160. Саранин В.А. Влияние электрического поля двойного слоя на возникновение тепловой конвекции// Электронная обработка материалов. 1983. N 6. С.44-47.
161. Саранин В.А. О гидродинамике термоэлектрических эффектов в расплавах в условиях невесомости// Тез. докл. 3-го Всесоюзного семинара по гидромеханике и тепломассообмену в невесомости. Черноголовка, 1984. С.71-73.
162. Саранин В.А.// Шаровая молния: Электромеханическая модель. Пермь, Глазов, 1986. 17 с. - Деп. в ВИНТИ 11.04.86, N 2650.
163. Саранин В.А.// Модель шаровой молнии. Пермь, Глазов, 1986. 10 с. - Деп. в ВИНТИ 11.11.86, N 7696.
164. Саранин В.А. О кавитационном механизме формирования высоковольтного пробоя в жидких диэлектриках// ПМТФ. 1988. N 3. С.45-48.
165. Болога М.К., Климов С.М., Майборода А.Н., Саранин В.А. Влияние поля на теплообмен в зоне испарения электрогидродинамического щелевого термосифона// Электронная обработка материалов. 1988. N 2. С.57-63.
166. Саранин В.А. Терромагнитогидродинамическое движение расплава в зазоре между коаксиальными цилиндрами// Магнитная гидродинамика. 1989. N 1. С.121-123.
167. Саранин В.А.// Динамика и теплообмен растущего горячего пузыря (к модели шаровой молнии). Глазов, 1990. 10 с. - Деп. в ВИНТИ 29.01.90, N 554.
168. Саранин В.А. Модель шаровой молнии с пузырьковым ядром// Шаровая молния: Сборник тезисов докладов. М.: Институт высоких температур, 1990. С.65.
169. Саранин В.А. Пузырьковая модель шаровой молнии // Исследования электрических разрядов в атмосфере: Сб. научных трудов Ярославского ун-та. Ярославль, 1991. С.100-102.

170. Briskman V., Saranin V. Influence of g-jitter on the pool boiling crisis in microgravity// Abstracts of International Workshop on G-Jitter. Potsdam, New York. USA. 1993. P. 18.
171. Саранин В.А. О зарядке, левитации и взлете в электрическом поле неоднородно испаряющейся капли// ЖТФ. 1995. Т.65. Вып.6. С.21-30.
172. Саранин В.А. Равновесие жидкостей и его устойчивость: Простая теория и доступные опыты. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1995. 172 с.
173. Саранин В.А., Жаров А.Н., Белоножко Д.Ф. Колебательная неустойчивость границы раздела проводящих жидкостей в нормальном электрическом поле// Письма в ЖТФ. 1997. Т.23. N 16. С.41-44.
174. Саранин В.А. О возможности левитации капель в атмосфере при их индукционной зарядке в электрическом поле в условиях неоднородного испарения// ЖТФ. 1998. Т.68. Вып.2. С.16-21.
175. Герасимов В.А., Данилов О.Е., Саранин В.А. Ветвление равновесных форм капель и пузырей в электрическом поле// Гидродинамика: Сб. науч. трудов. Вып.11. Пермь, 1998. С.114-122.
176. Саранин В.А. Испарение капель воды в атмосфере как возможный механизм их зарядки электричеством// Тр. 2-ой Российской национальной конференции по теплообмену. Т.4. М.: Из-во МЭИ, 1998. С.354-356.
177. Саранин В.А. К теории электротеплового взрыва, производимого молнией// ТВТ. 1999. N 1. С.31-36.
178. Саранин В.А. О взаимодействии двух электрически заряженных проводящих шаров// УФН. 1999. Т. 169. N 4. С.453-458.
179. Саранин В.А. О режимах возникновения статического рельефа границы раздела жидкостей в электрическом поле// Конвекция в системах несмешивающихся жидкостей: Сб. науч. тр. Екатеринбург: УрО РАН. 1999.
180. Саранин В.А. Некоторые эффекты взаимодействия капель воды в атмосфере// ЖТФ. 1999. Т.69. Вып.12.

181. Саранин В.А. Ветвление равновесных форм капель в электрическом поле // ЖТФ. 2000. Т.70. Вып.3.
182. Саранин В.А. Электрогидродинамическая теория кризиса кипения жидкостей в электрическом поле // Гидродинамика: Сб. науч. трудов. Вып.12. Пермь: ПГУ. 1999.