

2. ВЕТВЛЕНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСНЫХ ФОРМ КАПЕЛЬ И ПУЗЫРЕЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

2.1. О ФОРМЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КАПЕЛЬ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В связи с многочисленными приложениями явлений деформации наэлектризованных капель важно знать параметры деформированной капли и пределы ее устойчивости. Как показывают эксперименты (см., например, обзор [13] и эксперимент, описанный ниже) формы наэлектризованных капель близки к формам вытянутых эллипсоидов вращения.

Для сравнения теории и эксперимента теоретически построим сечение равновесной поверхности капли, считая ее поверхностью вращения, а внешнее поле однородным. Каплю будем считать незаряженным идеальным диэлектриком, находящимся в невесомости. В равновесии в каждой точке поверхности капли должен выполняться баланс давлений, при этом гидростатическое давление в капле формируется из атмосферного, капиллярного и электрического

$$p_f = \alpha K + p(E^2) + p_a, \quad (2.1)$$

K - полная кривизна поверхности капли, p_f - постоянная, зависящая от внешних параметров (например от объема капли), p - электрическое давление, которое запишем в виде [93]

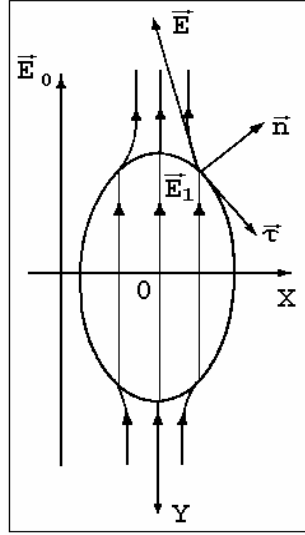


Рис. 2.1. Меридиальное сечение поверхности капли и расположение осей координат

$$p(E^2) = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\gamma E^2 \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \gamma} \right) - (\epsilon - 1) (\epsilon E_n^2 + E_\tau^2) \right), \quad (2.2)$$

$E_{\tau, n}$ - касательная и нормальная составляющие напряженности поля на поверхности капли (рис. 2.1). Будем считать, что внутри капли поле однородно и напряженность его равна E_1 . Если плоскость сечения капли обозначить x, y (рис. 2.1), то нетрудно получить

$$E^2 = E_1^2, \quad E_\tau^2 = \frac{E_1^2 z^2}{1 + z^2}, \quad E_n^2 = \frac{E_1^2}{1 + z^2}, \quad z = \frac{\partial y}{\partial x}. \quad (2.3)$$

Стрикционное слагаемое в (2.2) вычислялось двумя способами: используя форму линейной связи ϵ и γ и формулу Моссотти-Клаузиуса. В каждом из этих случаев соответственно получаем

$$\gamma \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \gamma} \right) = \epsilon - 1, \quad \gamma \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \gamma} \right) = \frac{1}{3} (\epsilon + 2) (\epsilon - 1), \quad (2.4)$$

а для электрического давления имеем выражение

$$p_{1,2} = - \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1)^2 E_1^2}{6(1 + z^2)} f_{1,2}, \quad f_1 = 3, \quad f_2 = (2 - z^2) \quad (2.5)$$

В качестве единицы измерения длины выберем капиллярную постоянную жидкости $a_s = \sqrt{2\alpha / \gamma g}$. Тогда обезразмеренное уравнение баланса давлений

(2.1), с учетом соотношений (2.2) - (2.5) и выражения для полной кривизны поверхности, преобразуется к уравнению типа Юнга-Лапласа [94]

$$\frac{z'}{(1+z^2)^{3/2}} + \frac{z}{x(1+z^2)^{1/2}} + \frac{F^2 f_{1,2}}{1+z^2} = -p_0, \quad (2.6)$$

$$F^2 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)^2 E_1^2 a_s}{6\alpha}, \quad z' = \frac{dz}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Для нахождения сечения $y(x)$ равновесной формы капли в электрическом поле уравнение (2.6) интегрировалось численно совместно с условием постоянства объема капли при изменении величины поля (то есть параметра F)

$$V = 2\pi \int_0^a x^2 dy = const. \quad (2.7)$$

a - расстояние от начала координат до полюса капли. Это условие фактически определяет значение постоянной p_0 в уравнении (2.6). Поскольку безразмерный параметр, характеризующий порог устойчивости капли в электрическом поле принято представлять в виде отношения электрического и капиллярного давлений

$$N^2 = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 R_0}{4\alpha}, \quad (2.8)$$

то необходимо получить формулу, связывающую N^2 и F^2 . Для этого будем считать форму капли близкой к эллипсоиду вращения и запишем формулу, связывающую между собой напряженности внешнего поля E_0 и поля внутри эллипсоида E_1 [93]

$$E_1 = \frac{E_0}{(1 + (\varepsilon - 1)n_x)}, \quad n_x = \frac{1 - e^2}{2e^3} \left(\ln \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right) - 2e \right). \quad (2.9)$$

n_x - коэффициент деполяризации, e - эксцентриситет эллипсоида, который связан с отношением полуосей $\beta = a/b$ так: $e = \sqrt{1 - 1/\beta^2}$. С учетом (2.8), (2.9) получаем следующее соотношение между N^2 и F^2 :

$$N^2 = F^2 \frac{3(1 + (\epsilon - 1)n_x)^2 \text{Bo}}{2(\epsilon - 1)^2}, \quad \text{Bo} = R_0/a_s. \quad (2.10)$$

Здесь Bo - число Бонда или безразмерный радиус эквивалентной сферы, а R_0 рассчитывался по формуле $R_0 = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}$.

В результате указанной процедуры интегрирования была построена зависимость удлинения капли, то есть отношения полуосей, от параметра N^2 . При малых полях, когда β близка к единице, а эксцентриситет e мал, оказалось справедливым соотношение

$$N^2 \approx 0,1 \cdot e^2 \approx 0,1 \cdot (\beta^2 - 1). \quad (2.11)$$

В работе [95] другим методом получено $N^2 \approx \frac{1}{9} e^2$. Однако при больших полях эта асимптотика нарушается и существует критическое поле (параметр N_*^2), при котором выполняется нефизическое условие, соответствующее пределу устойчивости найденной осесимметричной формы капли: $\frac{\partial \beta}{\partial (N^2)} \rightarrow \infty$.

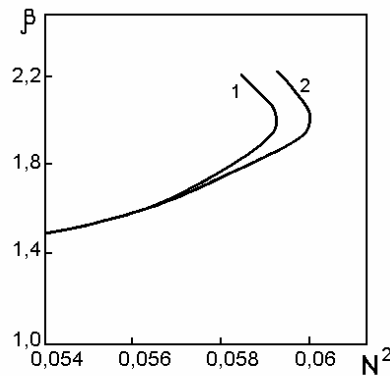


Рис. 2.2. Зависимости отношения полуосей форм сечения капель от квадрата безразмерной напряженности поля

На рис. 2.2 кривой 1 показано поведение зависимости $\beta(N^2)$ вблизи критической точки для воды ($\epsilon = 81$). Видно, что при $N_*^2 \approx 0,059$

эллипсоидальная форма капли с $\beta \approx 1,96$ становится неустойчивой. Отметим, что в классической работе [48] для проводящей капли $\varepsilon \rightarrow \infty$ получены критические значения параметров $N_*^2 \approx 0,052$ и $\beta_* \approx 1,9$. Для сравнения приведем результаты численного расчета координат сечения критической формы капли воды по (2.6), (2.7) с $R_0 = 1$ и $\beta_* = 1,96$ ($N^2 = N_*^2$) и эллипса с полуосями a, b , удовлетворяющими условиям $\frac{a}{b} = 1,96$, $ab^2 = R_0^3 = 1$.

Численный расчет		Эллипс	
x	y	x	y
0,1	1,548	0,1	1,548
0,2	1,510	0,2	1,511
0,3	1,445	0,3	1,446
0,4	1,349	0,4	1,351
0,5	1,212	0,5	1,218
0,6	1,022	0,6	1,032
0,7	0,763	0,7	0,755
0,8	0,005	0,8	0

Видим, что различие в координатах сечения формы капли от сечения эллипса не превышает 1%. Интегрирование проводилось первым улучшенным методом Эйлера [96] с шагом по x равным 10^{-5} . Вполне вероятно, что близость форм капли и эллипсоида не только факт, но и в какой-то мере, следствие сделанного предположения о том, что внутри искомой осесимметричной формы капли электрическое поле однородно. Отметим, что несмотря на то, что расчеты проведены для воды ($\varepsilon = 81$) все полученные результаты в качественном аспекте справедливы для диэлектрических жидкостей с любым ε . Также отметим, что подобные результаты получены в [51] другим методом.

Итак, в дальнейшем будем считать, что возможными равновесными формами наэлектризованных капель или пузырей являются эллипсоиды вращения вокруг направления поля.

Возможные формы и предел устойчивости равновесия эллипсоидальной диэлектрической капли можно найти проще, например, используя подход, развитый в классической работе [48] и реализованный также в [171].

В свете вышеизложенного предположим, что сечение капли в электрическом поле эллипс и запишем его уравнение в виде

$$\frac{x^2}{R^2(1-\delta)^2} + \frac{y^2}{R^2(1+\delta)^2} = 1, \quad (2.12)$$

δ - некий параметр, учитывающий деформацию капли и связанный с отношением полуосей так: $\delta = (\beta - 1) / (\beta + 1)$. Условие постоянства объема капли имеет вид

$$R = R_0 \left((1-\delta)^2 (1+\delta) \right)^{-1/3}, \quad (2.13)$$

R_0 - радиус исходной сферической капли. Выразим из (2.12) y и подставим в уравнение (2.6). Аналитически не удастся показать, что эллипс удовлетворяет уравнению (2.6), поэтому потребуем выполнения (2.6) и (2.12) в крайних точках $x = 0$, $x = R(1-\delta)$. Тогда получим уравнения, связывающие между собой W , p_0 , R_0 , δ . При этом оказывается, что независимо от выбора стрикционного слагаемого связь между величиной деформации δ и напряженностью поля $E_1(F)$ получается такой

$$F^2 = \frac{4\delta(2+\delta+\delta^2)}{3R(1-\delta^2)^2} \quad (2.14)$$

Постоянная R определяется по (2.13). Давление же в жидкости, зависящее от постоянной p_0 , как и следовало ожидать, получается различным:

$$p_{01} = \frac{2}{R} \left(\frac{1 + \delta^2}{(1 - \delta)(1 + \delta)^2} \right)$$

при линейной связи ε и γ ;

$$p_{02} = \frac{2}{3R(1 - \delta)} \left(\frac{2(1 + \delta^2)}{(1 + \delta)^2} + \frac{1 + \delta}{1 - \delta} \right)$$

при связи ε и γ по формуле Моссотти-Клаузиуса.

Зависимость $\beta(N^2)$, для воды построенная по (2.14), с учетом (2.10) и (2.13), показана на рис. 2.2 кривой 2. Видно, что и в плане определения порога устойчивости равновесных форм капель результаты численного счета и аналитического, в эллипсоидальном приближении, отличаются менее, чем на 2%.

В заключение отметим, что расчет критической (в смысле кризиса устойчивости) напряженности внешнего поля по соотношению (2.14), с учетом выражений (2.6), (2.9), (2.13) при $\beta = 1,9$ дает для капли воды радиусом $R_0 = 2$ мм значение $E_{0*} = 9,3$ кВ/см. Для сравнения приведем экспериментальную формулу для критической напряженности поля, полученную в [97] для капель воды радиуса R_0

$$E_{0*} = \frac{3,875}{\sqrt{R_0}}, \quad [E] = \text{кВ/см}, \quad [R] = \text{см}.$$

Расчет по ней для капель радиуса $R_0 = 0,2$ см дает $E_{0*} = 8,7$ кВ/см. Таким образом, соответствие результатов более чем удовлетворительное.

2.2. ВЕТВЛЕНИЕ РАВНОВЕСНЫХ ФОРМ НАЭЛЕКТРИЗОВАННЫХ КАПЕЛЬ

Как показано в первой главе равновесие плоской поверхности жидкости во внешнем перпендикулярном ей электрическом поле при определённых условиях неустойчиво, и жидкость переходит в новое состояние с

деформированной поверхностью, причём эти переходы могут иметь жёсткий характер и сопровождаться гистерезисом. Подобный результат имеет место и в случае магнитных жидкостей в магнитном поле [42]. В случае капель магнитных жидкостей в магнитном поле как теоретически, так и экспериментально установлено, что в пренебрежении действием гравитационных сил равновесными формами являются сферы и фигуры, близкие к вытянутому эллипсоиду вращения. При этом, как и в случае плоской поверхности, для капель магнитных жидкостей наблюдались жёсткие переходы между равновесными формами, сопровождающиеся гистерезисом. Очевидно, аналогичные результаты должны иметь место и для диэлектрических капель в электрическом поле, однако на практике чаще приходится иметь дело с проводящими, да ещё и заряженными каплями. В [98] отмечено, что заряженные капли также могут иметь подкритические равновесные эллипсоидальные формы, но детально этот вопрос не обсуждается. Таким образом, вопрос о ветвлении равновесных форм заряженных и незаряженных капель во внешнем электрическом поле, а также переходах между ними, остается малоизученным.

Рассмотрим сначала случай диэлектрической капли в однородном электрическом поле [175, 181]. Пусть вытянутый диэлектрический эллипсоид вращения (капля) помещен во внешнее поле так, что большая полуось эллипсоида параллельна линиям напряжённости. Для определения возможных равновесных эллипсоидальных форм капель найдём потенциальную энергию эллипсоида во внешнем поле. Если поле однородно, то электрическая составляющая энергии равна [93]

$$W_e = -\frac{1}{2} E_0 P_x = -\frac{2\pi\epsilon_0 ab^2(\epsilon - 1)E_0^2}{3(1 + (\epsilon - 1)n_x)}. \quad (2.15)$$

С учетом выражения для площади поверхности эллипсоида вращения поверхностную потенциальную энергию капли можно записать в виде

$$W_{\sigma} = 2\pi\alpha R_0^2 \left(\beta^{-2/3} + \frac{\beta^{4/3} \arctan \sqrt{\beta^2 - 1}}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \right) = 2\pi\alpha R_0^2 S_x. \quad (2.16)$$

В качестве единицы измерения энергии выберем $2\pi\alpha R_0^2$. Тогда безразмерную полную энергию эллипсоида можно представить в форме

$$W = S_x - \frac{4(\varepsilon - 1)N^2}{3(1 + (\varepsilon - 1)n_x)}. \quad (2.17)$$

Возможные равновесные формы эллипсоида удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial}{\partial \beta} W = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} W > 0.$$

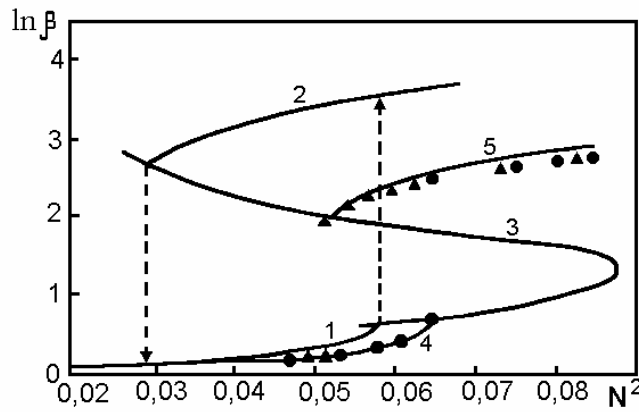


Рис. 2.3. Зависимости логарифма отношения полуосей эллипсоидальных форм диэлектрических капель от квадрата безразмерной напряженности поля. Экспериментальные точки соответствуют магнитным жидкостям в магнитном поле [42]

Компьютерная минимизация энергии даёт зависимость отношения полуосей эллипсоида от квадрата напряжённости поля (точнее, от безразмерного параметра N^2), которая при $\varepsilon = 81$ (капли воды) изображена на рис. 2.3 (линии 1, 2; масштаб вдоль оси β логарифмический). Видно, что существует семейство эллипсоидов, равновесие которых неустойчиво: для воды это интервал $1,85 < \beta < 12,8$. Между двумя ветвями устойчивых (в смысле существования $\min W$) равновесных форм эллипсоидов существуют жёсткие переходы и гистерезис: переход к более вытянутым формам происходит при

$N_1^2 \approx 0,059$, а обратный переход при $N_2^2 \approx 0,029$. Существование верхней ветви устойчивых равновесных форм жидких эллипсоидов ранее было установлено как теоретически так и экспериментально только для случая магнитных жидкостей в магнитном поле [42]. Область параметров, в которой равновесие эллипсоидов неустойчиво, зависит от отношения диэлектрических проницаемостей капли и окружающей среды и показана на рис. 2.3 линией 3. Крайняя правая точка соответствует $\epsilon \approx 20$, то есть при $\epsilon < 20$ минимум потенциальной энергии существует для любых жидких вытянутых эллипсоидов вращения, находящихся во внешнем электрическом поле. Кривые 4 и 5 соответствуют $\epsilon = 40$. Черные кружки и треугольники соответствуют результатам экспериментов с каплями магнитных жидкостей с $\mu = 40$, приведенных в [42]. При этом роль параметра N^2 играет безразмерный параметр $H_0^2 R_0 / 16\pi\alpha$ (H_0 - напряженность внешнего магнитного поля, все величины должны быть выражены в гауссовой системе единиц). Видно, что сравнение результатов демонстрирует удовлетворительное согласие.

Перейдём к рассмотрению заряженной проводящей капли, находящейся во внешнем электрическом поле [181]. Считая, что такая капля также может иметь форму вытянутого эллипсоида вращения, запишем ее потенциальную энергию в системе отсчета центра масс в виде

$$W = \alpha S + \frac{kq^2}{2C} - \frac{E_0 P_x}{2}, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \quad (2.18)$$

Здесь выражение для дипольного момента капли P_x дается (2.15), в котором надо взять предел $\epsilon \rightarrow \infty$, соответствующий проводящей капле. Учитывая выражения для площади поверхности и ёмкости вытянутого эллипсоида вращения [93], выражение для энергии в ранее выбранных единицах можно записать так

$$W = S_x + \frac{4Q^2}{C_x} - \frac{4N^2}{3n_x}, \quad Q^2 = \frac{kq^2}{16\pi\alpha R_0^3}, \quad \frac{1}{C_x} = \frac{\beta^{1/3}}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \text{Arch}(\beta). \quad (2.19)$$

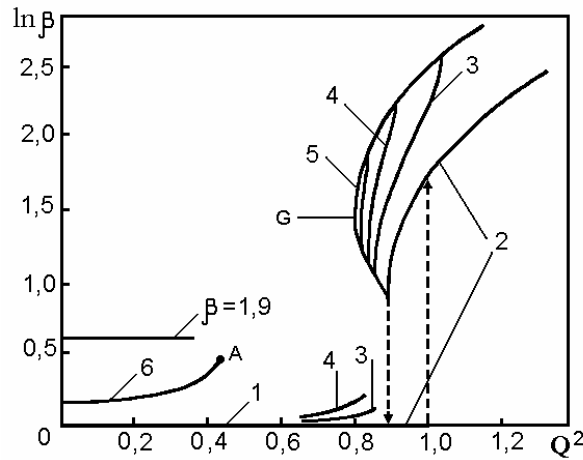


Рис. 2.4. Зависимости логарифма отношения полуосей эллипсоидальных форм проводящих капель от квадрата безразмерного заряда при различных значениях напряженности внешнего поля

На рис.2.4 представлены зависимости логарифма отношения полуосей возможных равновесных эллипсоидальных форм капель в зависимости от квадрата безразмерного заряда капли Q^2 при различных значениях безразмерного параметра поля N^2 , полученные минимизацией W . Цифрам соответствуют следующие величины квадрата параметра поля: 1, 2 - $N = 0$; 3 - $N^2 = 0,002$; 4 - $N^2 = 0,003$. Случай $N = 0$ соответствует заряженной капле в отсутствие поля. В этом случае одна из равновесных форм - сфера $\beta = 1$, ее равновесие становится неустойчивым при $Q^2 = 1$ (результат Рэлея [47]). Обратный переход от вытянутого эллипсоида к сфере совершается при $Q^2 = 0,88$. Видно, что с увеличением поля верхняя ветвь существования равновесных эллипсоидов значительно уменьшается. Например, при $N^2 = 0,003$ она соответствует интервалу $3 \leq \beta \leq 10$, а при $N_*^2 = 0,0045$ исчезает совсем. Соответствующие предельные значения $Q_*^2 = 0,80$ и $\beta_* = 4,4$. Таким образом, область существования верхних ветвей равновесных форм ограничена кривыми 2 и 5. Прямая $\beta = 1,9$ соответствует предельным

устойчивым формам незаряженных проводящих капель во внешнем электрическом поле по Тейлору [48].

В заключение отметим, что в реальных условиях эксперимента на фоне устойчивой эллипсоидальной моды возможно развитие неустойчивости по отношению к высокомодовым возмущениям [99], однако их развитие может быть подавлено в случае высоковязких жидкостей или капель малого размера. В частности, эксперименты по наблюдению жестких переходов и гистерезиса в магнитном поле (рис. 2.3) проводились с каплями магнитной жидкости весьма малых размеров ($R_0 = 15$ мкм) [42].

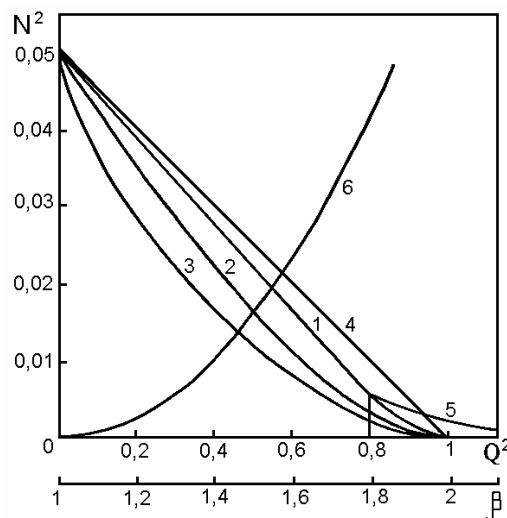


Рис. 2.5. Кривые нейтральной устойчивости эллипсоидальных форм проводящих заряженных капель во внешнем электрическом поле, построенные по данным расчетов различных авторов

Рассмотрим подробнее предельно устойчивые эллипсоидальные формы капель, соответствующие нижним ветвям, то есть точкам типа А на рис. 2.4. Информация о них сведена к графикам на рис. 2.5. Цифрами 1, 2, 3 показаны нейтральные кривые, полученные различными методами разными авторами. Выше кривых расположена область параметров N^2, Q^2 , для которой равновесные формы капель, соответствующие нижним ветвям, неустойчивы. Кривая 1 получена методом минимизации потенциальной энергии, изложенным выше. Кривая 2 построена по результатам работы [95], в которой учитывалось

действие сил тяжести, а граница устойчивости определялась из уравнения баланса сил многомодовым методом. При построении кривой 3 использовались результаты работы [49], в которой возможные равновесные формы капель устанавливались на основе метода конечных элементов и также учитывалось действие сил тяжести. Как видно из рис. 2.5, силы тяжести дестабилизируют равновесие. Аппроксимационная прямая 4 соответствует уравнению

$$Q^2 + \mu N^2 = 1, \quad \mu = 1 / 0,052, \quad (2.20)$$

которое получается из результатов [95] при пренебрежении силами тяжести и в пределе малых эксцентриситетов капель ($e \approx 0$). В соотношении (2.20), фактически, реализуется тезис о том, что за неустойчивость равновесных форм капель ответственна сумма электрических давлений [13]. Предел устойчивости эллипсоидальных форм капель, определяемый по (2.20), является, с одной стороны, наиболее слабым условием неустойчивости из всех представленных на рис. 2.5, с другой стороны близок к ним, наконец условие (2.20) простое и прозрачное с физической точки зрения, поэтому может быть использовано для оценок предела устойчивости в рамках некоторых постановок смежных задач. Цифрой 5 на рис. 2.5 отмечена линия, ограничивающая область существования верхних ветвей равновесных форм капель. Наконец, цифрой 6 обозначена кривая, показывающая связь отношения полуосей β предельно устойчивых форм капель на нижних ветвях, с параметрами поля N^2 , соответствующими пределам устойчивости при различных значениях Q^2 .

2.3. ОБ УСИЛЕНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ АТМОСФЕРЫ КАПЛЯМИ ВОДЫ

Известно, что если проводящий шар поместить в однородное внешнее электрическое поле, то напряженность поля на полюсе шара будет в 3 раза больше, чем напряженность поляризующего внешнего поля. Очевидно, что эллипсоидальные проводящие капли воды еще больше будут усиливать

внешнее поле. Используя полученные выше результаты, рассчитаем коэффициенты усиления поля возможными равновесными формами капель. Определим коэффициент усиления так: $K = E_2 / E_0$, где E_2 напряженность поля во внешней среде (воздухе), E_0 - напряженность однородного внешнего поля на большом удалении от капли. Тогда, для случая диэлектрической капли во внешнем поле, учитывая граничное условие $E_2 = E_1 \varepsilon_1 / \varepsilon_2$ и соотношение (2.9), получим

$$K_1 = \frac{\varepsilon}{1 + (\varepsilon - 1)n_x}, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 / \varepsilon_2. \quad (2.21)$$

Напряженность поля у вершины заряженной проводящей капли, находящейся в однородном внешнем поле будет складываться из напряженности поля заряженного эллипсоида [93] и напряженности внешнего, усиленного поля

$$E_2 = \frac{kq\beta^{2/3}}{R_0^2} + K_1 E_0. \quad (2.22)$$

Выражение для K_1 , соответствующее проводящей капле, получается из (2.21) в пределе $\varepsilon \rightarrow \infty$. Таким образом, в этом случае для коэффициента усиления поля получаем

$$K_2 = \frac{1}{n_x} + J\beta^{2/3}, \quad J = \frac{Q}{N} = \frac{kq}{R_0^2 E_0}. \quad (2.23)$$

Выше было найдено, что область существования равновесных эллипсоидальных форм капель, соответствующая верхним ветвям на рис 2.4, уменьшается с ростом параметра поля и при $N_*^2 \approx 0,0045$, $Q_*^2 \approx 0,80$, $\beta \approx 4,4$ исчезает совсем. Следовательно на верхних ветвях равновесных форм имеем ограничения на поле сверху $N < N_*$, а на заряд капель снизу $Q > Q_*$. В силу этого параметр J на верхних ветвях равновесных форм также оказывается ограниченным снизу значением $J = Q_* / N_* \approx 13$. Соответствующий наименьший коэффициент усиления поля формами капель на верхних ветвях

равен $K_2 \approx 50$. Напротив, коэффициент усиления формами капель на нижних ветвях может быть любым.

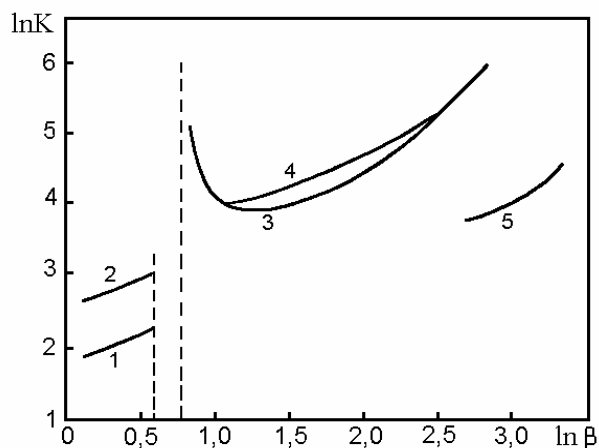


Рис. 2.6. Зависимости логарифмов коэффициентов усиления поля от логарифма отношения полуосей эллипсоидальных форм капель

На рис. 2.6 показаны зависимости логарифмов коэффициентов усиления поля от логарифма отношения полуосей. Кривые 1, 2 соответствуют K_2 на нижних ветвях при $J = 3$ и 10 , цифрой 3 показана граница области коэффициентов усиления формами капель на верхних ветвях (кривая 4 - $J = 20$), кривая 5 соответствует коэффициентам усиления поля формами диэлектрических капель на ветви 2 рис. 2.3.

Известно [15, 16, 18, 19], что напряженность электрического поля в воздухе при грозе редко превышает значение 1 кВ/см , а в среднем составляет около $0,3 \text{ кВ/см}$. Тогда как для искрового пробоя воздуха (например для инициирования молнии) требуется напряженность почти в 100 раз большая. В свете полученных выше результатов можно предположить, что вытягивающиеся в эллипсоид капли воды способны усиливать электрическое поле атмосферы до пробивных значений и в особенности это касается капель, соответствующих верхним ветвям равновесных форм, на которых коэффициенты усиления поля более 50.

Результаты, полученные в этой и первой главе, могут быть упорядочены и обобщены, если принять утверждение, согласно которому за неустойчивость

равновесия плоской или искривленной наэлектризованной жидкой поверхности ответственна величина квадрата локальной напряженности поля (или величина квадрата плотности поверхностного заряда). В соответствии с этим введем следующий безразмерный параметр поля, определяющий порог устойчивости плоской или искривленной поверхности жидкости

$$N_e^2 = \frac{\epsilon_0 E_n^2 R(l_m)}{4\alpha}. \quad (2.24)$$

Здесь E_n - нормальная составляющая напряженности поля на поверхности капли или на плоской поверхности, созданная одним источником. Если источников поля несколько, то в соответствии с (2.20) складываются квадраты напряженностей, R, l_m - характерные размеры. Очевидно для плоской поверхности параметр N_e совпадает с определенным в первой главе параметром N . Рассчитаем критические значения параметра N_e для капель. В случае рэлеевской задачи о неустойчивости заряженной капли, переходя от заряда к напряженности, получим условие наступления неустойчивости в виде $N_e = 1$. В случае тейлоровской задачи о неустойчивости капли во внешнем поле условие неустойчивости $N^2 = 0,052$, с учетом того, что $E_n = E_0 / n_x$ ($\beta = 1,9$) дает $N_e^2 = 1,5$. Условие неустойчивости равновесия плоской поверхности (1.67), а также условие неустойчивости заряженной капли по отношению к делению ее пополам, получается таким $N_e^2 = 2,36$ [174].

2.4. ВЕТВЛЕНИЕ РАВНОВЕСНЫХ ФОРМ НАЭЛЕКТРИЗОВАННЫХ ПУЗЫРЕЙ

Рассмотрим теперь вопрос о ветвлении равновесных форм заряженных или поляризованных пузырей [175]. Такие пузыри могут возникать в процессах кипения жидкостей в электрическом поле [4], либо на предпробойной стадии электрического пробоя в жидкости [24-29, 50].

Пусть незаряженный пузырь находится в условиях невесомости в несущей жидкости с диэлектрической проницаемостью ϵ , которая помещена во внешнее однородное электрическое поле напряженностью E_0 . Предположим, что в отсутствие поля пузырь имеет форму шара радиуса R_0 , такого, что имеет место механическое равновесие, определяемое уравнением

$$p_{02} = p_0 + 2\alpha / R_0, \quad p_{02} = \frac{3mR_T T}{4\pi\mu R_0^3}. \quad (2.25)$$

p_0, p_{02} - внешнее давление и давление газа в пузыре, m, μ - масса газа в пузыре и молярная масса, R_T - универсальная газовая постоянная. Будем считать, что при наложении внешнего поля пузырь адиабатически деформируется из шара в вытянутый вдоль поля эллипсоид вращения с отношением полуосей $\beta = a/b > 1$. При этом в соответствии с результатами предыдущей главы будем пренебрегать стрикционными эффектами при анализе равновесных форм пузырей и определении порога их устойчивости.

Запишем потенциальную энергию деформированного пузыря, считая за начало её отсчета потенциальную энергию недеформированного пузыря. Потенциальная энергия будет содержать слагаемые, равные работе сил внешнего давления и работе газа при деформации пузыря, а также поверхностную энергию и энергию, связанную с поляризацией пузыря. В единицах $[W] = 4\pi\alpha R_0^2$, с учетом соотношений (2.8) - (2.16), она будет иметь вид

$$W = \frac{1}{3\lambda}(r_0^3 - 1) - \frac{M}{3(\gamma - 1)} \left(1 - \frac{1}{r_0^{3(\gamma-1)}} \right) + \left(\frac{r_0^2 S_x}{2} - 1 \right) - \\ - 2N^2 r_0^3 \epsilon (1 - \epsilon) \left[\frac{1}{3(\epsilon + (1 - \epsilon)n_x)} - \frac{1}{3\epsilon + (1 - \epsilon)} \right]. \quad (2.26)$$

Здесь введены новые обозначения

$$M = \frac{p_{02} R_0}{\alpha}, \quad r_0 = \frac{(ab^2)^{1/3}}{R_0}. \quad (2.27)$$

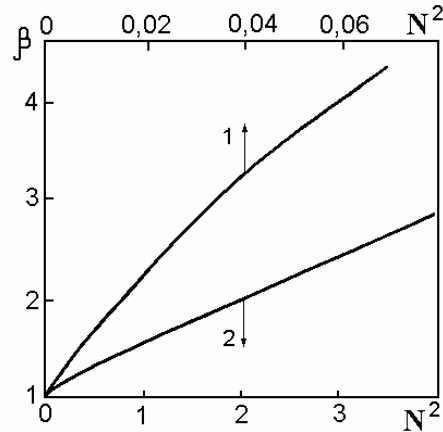


Рис. 2.7. Зависимости отношения полуосей эллипсоидальных форм пузырей от безразмерного квадрата напряженности поля

Сейчас потенциальная энергия является функцией двух переменных: степени вытянутости эллипсоида β и его объёма, характеризующегося эквивалентным радиусом r_0 . В состоянии устойчивого механического равновесия необходимо иметь $\min W(\beta, r_0)$.

Минимизация проводилась численно, и её результаты представлены на рис. 2.7. Кривые 1, 2 показывают зависимость равновесных эллипсоидов от параметра поля N^2 для воды $\epsilon = 81$ и бензола $\epsilon = 2,23$ соответственно. Величина вытянутости β при этом практически не зависит от радиуса исходного пузыря R_0 , тогда как объём деформированного эллипсоида начинает существенно зависеть от R_0 при его уменьшении. То есть пузыри малых размеров при наложении поля не только вытягиваются, но и увеличивают свой объём, а следовательно, и давление газа в них изменяется. Чтобы найти это изменение необходимо, в общем случае, учесть стрикционный эффект. Здесь этот вопрос нас интересоваться не будет. Факт отнесения пузыря к малым или большим определяется величиной параметра $\lambda = \alpha / p_0 R_0$. При $\lambda > 0,01$ пузырь уже можно считать малым.

Таким образом, во-первых, в отличие от капель, равновесным формам пузырей во внешнем поле соответствуют любые β , монотонно растущие с величиной напряженности поля. Во-вторых, при малых размерах пузырей становится существенной их сжимаемость, так, что при наложении поля увеличивается объем пузыря.

Рассмотрим теперь заряженный сферический пузырь. Пусть сферический пузырь радиуса R_0 вместе с несущей жидкостью находится в невесомости в механическом равновесии и заряжен по поверхности до заряда q , а также содержит внутри себя массу газа m . Тогда условие его механического равновесия имеет вид

$$p_{02} + \frac{kq^2}{8\pi R_0^4} = \frac{2\alpha}{R_0} + p_0, \quad (2.28)$$

Проведя обезразмеривание, получим

$$\frac{M}{2} + Q^2 = \frac{1}{2\lambda} + 1, \quad \lambda = \frac{\alpha}{p_0 R_0}. \quad (2.29)$$

Параметр Q определен ранее по (2.19). Предположим, что при определенных зарядах пузырь может деформироваться в вытянутый эллипсоид вращения с отношением полуосей β . Запишем потенциальную энергию деформированного пузыря, принимая за начало ее отсчета энергию сферического пузыря, удовлетворяющего условию (2.28). В безразмерной форме получим

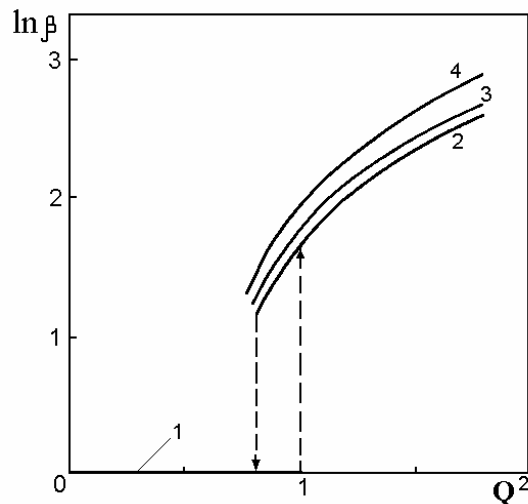


Рис. 2.8. Зависимости логарифма отношения полуосей эллипсоидальных форм заряженных пузырей от квадрата безразмерного заряда

$$W = \frac{1}{3\lambda}(r_0^3 - 1) - \frac{M}{3(\gamma - 1)} \left(1 - \frac{1}{r_0^{3(\gamma-1)}} \right) + \frac{r_0^2 S_x}{2} - 1 + 2Q^2 \left(\frac{1}{r_0 C_x} - 1 \right). \quad (2.30)$$

C_x определена по (2.19). По-прежнему будем считать, что состоянию устойчивого равновесия соответствует минимум потенциальной энергии, которая является функцией двух параметров $W(\beta, r_0)$. Результаты численной минимизации W по двум переменным для этого случая представлены на рис. 2.8. Прямая 1 соответствует равновесию сферы, которое устойчиво до $Q = 1$ для любых пузырей. То есть вновь получаем результат, согласно которому в смысле потери устойчивости сферического равновесия пузырь ведет себя как капля жидкости. Однако, характер дальнейшего ветвления уже зависит от размера пузыря и существенно отличается от капельного для малых пузырей. Так, на рис. 2.8 кривые 3, 4 соответствуют заряженным пузырям радиуса $R_0 = 0,01$ мм в бензоле и воде. Видно, что степень их вытянутости больше, чем у соответствующих капель. Характер же ветвления равновесных форм больших пузырей $R_0 > 0,01$ мм практически не отличается от капельного (линии 1, 2). Объем деформированных пузырей малого размера уменьшается по сравнению с объемом сферы, соответствующей исходному равновесию (2.28) в смысле $r_0 < R_0$. Тем самым, давление газа внутри пузыря после его деформации также изменяется. При этом следует оговориться, что радиус исходного сферического пузыря R_0 , определяемый уравнением (2.28), больше радиуса соответствующего незаряженного пузыря, который обозначим $R_{q=0}$.

Введем коэффициент увеличения радиуса пузыря n , определив его следующим образом: $n = R_0 / R_{q=0}$. Найдем возможные значения коэффициента увеличения. Для этого вновь обезразмерим уравнение баланса давлений,

выбрав в качестве единицы измерения радиуса величину $[R] = 2\alpha / p_0$. Тогда безразмерное уравнение баланса давлений можно представить в форме

$$\frac{\chi}{R_0^2} + Q^2 = R_0 + 1, \quad \chi \equiv \frac{3mR_T T}{4\pi\mu p_0 [R]^3}. \quad (2.31)$$

Положив $Q = 0$, найдем $\chi = (1 + R_{q=0})R_{q=0}^2$. С учетом этого уравнение (2.31) приводится к виду

$$Q^2 = 1 + nR_{q=0} - \frac{1 + R_{q=0}}{n^2}. \quad (2.32)$$

Полученное уравнение на пределе устойчивости сферической формы пузыря, то есть при $Q^2 = 1$, определяет максимальные коэффициенты увеличения радиуса пузыря при его зарядке электричеством в зависимости от первоначального радиуса $R_{q=0}$

$$n_m = \left(1 + \frac{1}{R_{q=0}}\right)^{1/3}. \quad (2.33)$$

Для пузырьков радиуса 1 мм вычисления дают $R_{q=0} \approx 700$, а $n_m \approx 1,0005$, для 1 мкм получаем $n_m \approx 1,3$. Поскольку в реальных условиях парогазовые зародыши редко имеют размеры менее 1 мкм, то коэффициент увеличения в 1,3 раза можно считать верхним пределом. Теперь полное изменение объема пузыря при его зарядке электричеством с последующей деформацией в эллипсоид при $Q > 1$ можно вычислить так $n_0 = (r_0 n)^3$, где r_0 определено по (2.27) и отвечает

минимуму W , а n , при заданных значениях Q и $R_{q=0}$, определяется из уравнения (2.32). Соответствующие вычисления показывают, что на верхних ветвях равновесных форм, как и следовало ожидать, $n_0 > 1$. Так, например, для пузырька в воде радиусом $R_{q=0} = 0,01$ мм и $Q^2 = 1,2$ получаем $n_0 = 1,05$, а для $Q^2 = 1,5$ соответственно $n_0 = 1,02$.

Таким образом, зарядка пузыря электричеством с последующей деформацией его в эллипсоид приводит к увеличению его объема, аналогично тому, как это происходит с незаряженными пузырями во внешнем электрическом поле.

2.5. К ТЕОРИИ КАВИТАЦИОННОГО МЕХАНИЗМА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПРОБОЯ В ЖИДКОСТИ

В современной разрядно-импульсной технологии обработки материалов электрический разряд (пробой) в жидкости часто играет основную роль и требует всестороннего изучения. При этом вопрос об образовании и эволюции газовых полостей и их роли в инициировании и развитии разряда является одним из принципиальных в физике высоковольтного разряда в жидкости [28, 29]. Ниже будет проанализирован кавитационный механизм образования и эволюции газовой полости в системе электродов острие-плоскость на предпробивной стадии разряда [164] и произведено сравнение с результатами экспериментов других авторов [55].

Рассмотрим рост кавитационного пузырька, зарождающегося вблизи электрода-острия. Будем считать, что пузырек растет за счет электростатических сил, давление в жидкости p_0 , внутри пузырька давление ионизированных паров мало по сравнению с p_0 . Кроме того, пренебрежем влиянием электродов на динамику роста, то есть считаем, что пузырек растет в безграничной идеальной несжимаемой жидкости. Используя данные опытов [55], предположим, что поверхность пузырька все время остается эквипотенциальной с потенциалом, равным потенциалу электрода φ_0 . Ниже показано, что можно также пренебречь лапласовским давлением. В принятых предположениях запишем динамическое уравнение для радиуса пузырька в виде [100]

$$R\ddot{R} + (3/2)\dot{R}^2 = (p_e - p_0)/\rho, \quad p_e = \varphi_0^2 / (8\pi k R^2), \quad (2.34)$$

(p_e - электростатическое давление на поверхности пузыря). С помощью простых преобразований нетрудно получить первый интеграл этого уравнения

$$\frac{1}{2} R^3 \dot{R}^2 + \frac{1}{3} \frac{p_0 R}{\rho} - \frac{\Phi_0^2 R}{8\pi k \rho} = const.$$

Выбрав в качестве начальных условий $\dot{R} = u(t=0) = 0$, $\dot{R}(t=0) = R_{00}$ (R_{00} - радиус закругления электрода), получим для скорости роста пузырька следующее выражение, записанное в безразмерной форме:

$$\frac{u(R)}{u_0} = \left[\frac{1}{R^3} \left(\Phi_0^2 (R-1) - \frac{1}{3} (R^3 - 1) \right) \right]^{1/2}, \quad (2.35)$$

$$u_0 = \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}, \quad \Phi_0^2 = \frac{\Phi_0^2}{8\pi k p_0 R_{00}^2}.$$

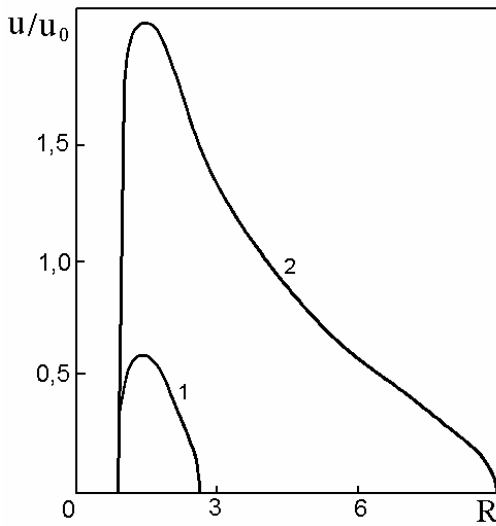


Рис. 2.9. Зависимости безразмерной скорости роста пузыря от его безразмерного радиуса

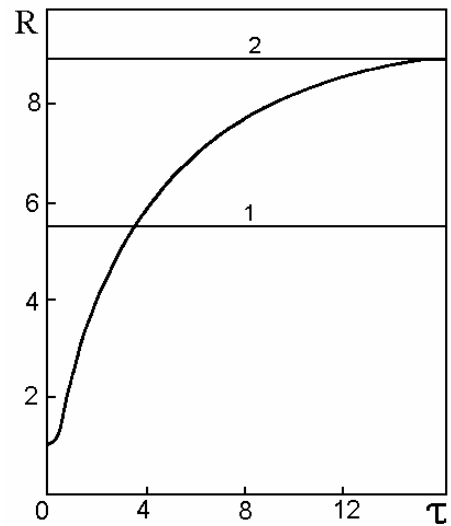


Рис. 2.10. Зависимость радиуса пузыря от времени в безразмерных единицах

R - измеряется в единицах R_{00} . Функция $u(R)$ имеет максимум в точке $R_m = 3/2 - 1/(2\Phi_0^2)$. Очевидно, при $\Phi_0^2 > 1/3$ $\max R_m = 3/2$. Кроме точки $R = 1$, функция $u(R)$ обращается в нуль при

$$R_1 = \sqrt{3(\Phi_0^2 - 1/4)} - 1/2. \quad (2.36)$$

Полученное значение R_1 - предельный размер расширяющегося сферического пузырька. Найдем также предельную скорость роста пузырька, определив ее как $u(\max R_m) \equiv u_m$. Тогда

$$u_m = \frac{2}{3} u_0 \left[\frac{1}{3} \left(\Phi_0^2 - \frac{19}{12} \right) \right]^{1/2} \quad (2.37)$$

Из (2.36) видно, что кавитационный режим роста пузырька возможен при $\Phi_0^2 > 1/4$. При атмосферном давлении p_0 это дает для напряженности поля $E > 0,45$ МВ/см. На рис. 2.9 представлены зависимости $u(R)$ в безразмерных единицах при $\Phi_0^2 = 4$ и 30,2 (кривые 1, 2). Кривая 2 построена для *n*-гексана и параметров $p_0 = 10^5$ Па, $\phi_0 = 33$ кВ, $R_{00} = 0,04$ мм, которые использовались в эксперименте [55]. Максимальное значение скорости роста полости для указанных параметров, рассчитанное по (2.37), $\sim 34,8$ м/с. По измерениям [55] оно достигало 50 м/с.

Для получения зависимости $R(t)$ уравнение (2.34) было проинтегрировано численно. Результаты интегрирования при $\Phi_0^2 = 30,2$ представлены на рис. 2.10 в безразмерных переменных. При этом безразмерное время $\tau = tu_0/R_{00}$. Линии 1 и 2 соответствуют предельному и равновесному значениям радиуса пузырька. Равновесное значение определяется уравнением баланса сил (давлений) и равно $R = \Phi_0$. Размерное время роста пузырька до равновесного радиуса ~ 8 мкс, до предельного ~ 38 мкс. По измерениям [55] пузырек удваивает начальный радиус за время 2 мкс. Расчеты по результатам интегрирования (рис. 2.11) дают время удваивания радиуса $\sim 1,8$ мкс. На рис. 2.12 представлена зависимость $R(\tau)$ в логарифмическом масштабе. Видно, что на начальной стадии роста $R \sim t^2$, при $1,5 < R < 7$ (участок 2) $R \sim t^{0,57}$. В [55] экспериментально определенный показатель роста на участке 2 равен 0,6.

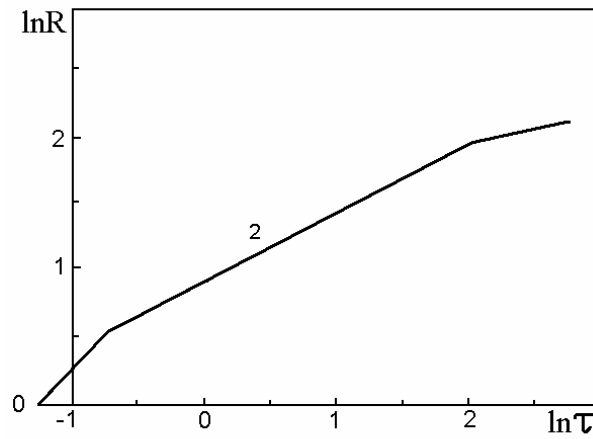


Рис. 2.11. Логарифмическая зависимость радиуса пузыря от времени

В [1, 55] возникновение стримеров на определенном этапе роста сферической полости связывается с развитием неустойчивости поверхности жидкости в электрическом поле. Однако анализ устойчивости при этом не проведен.

Проведем анализ устойчивости сферического равновесия кавитационной полости с заряженной поверхностью, используя метод Рэлея [47, 54]. При этом предположим, что в момент, когда неустойчивость становится возможной, возмущения растут быстрее, чем увеличивается средний радиус полости. Тогда состояние полости можно считать квазиравновесным радиуса R_0 с потенциалом ϕ_0 и постоянным зарядом $Q_0 = \phi_0 R_0 / k$. Исследование устойчивости проведем, считая полость полностью вакуумированной и учитывая, что в отличие от капли при деформациях поверхности полости объем ее может изменяться. Уравнение возмущенной поверхности представим в виде

$$R = R_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\cos \theta) \right), \quad P_n - \text{полиномы Лежандра.}$$

Электрический потенциал и давление в жидкости удовлетворяют уравнению Лапласа и соответствующие решения можно представить в форме

$$\begin{aligned}\varphi_e &= \frac{kq}{r} + \frac{kq}{R_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{R_0}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos\theta), \\ p_e &= p_0 + p_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{R_0}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos\theta), \quad r > R.\end{aligned}\quad (2.38)$$

Из условия эквипотенциальности поверхности $\nabla\varphi_e \vec{\tau} = 0$ ($\vec{\tau}$ - единичный вектор касательной к поверхности) находим $A_n = a_n$. Из условия непрерывности давления $p|_R = (p_e - p_{\text{л}})|_R$ (p_e и $p_{\text{л}}$ - электрическое и лапласовское давление) получаем

$$B_n = a_n \left(\frac{\Phi_0^2}{4\pi k p_0 R_0^2} (n-1) - \frac{\alpha}{R_0 p_0} (n^2 + n - 2) \right).$$

Потенциальную энергию пузыря представим в виде

$$W = -\frac{q}{2} \oint \frac{\nabla\varphi_e d\vec{S}}{R} + \alpha \oint dS + \int p_e dV. \quad (2.39)$$

Для устойчивости равновесия необходима положительность второй вариации потенциальной энергии. Вычисляя интегралы в (2.39) с точностью до a_n^2 и переходя к безразмерным переменным, находим условие устойчивости

$$\Phi_1^2 < \frac{\lambda \left[\frac{1}{3}(n-1)(n-2)(n+2) + \frac{1}{2}(n^2 + n + 2) \right] + 1}{\left[n + \frac{2}{3}(n-1)(n-2) \right]} \equiv \Phi_{1*}^2, \quad (2.40)$$

$$\lambda = \alpha / p_0 R_0, \quad \Phi_1^2 = \Phi_0^2 / (8\pi k p_0 R_0^2).$$

Зависимость $\Phi_{1*}^2(n)$ имеет минимум, при этом n_m представляет собой номер наиболее опасной сферической гармоники. При $\lambda \ll 1$ оказывается $n_m \gg 1$ и $n_m \approx (6/\lambda)^{\frac{1}{3}}$, что и отвечает рифлению поверхности полости. Таким образом, в отличие от заряженной капли и заряженного пузыря с газом внутри, для которых наиболее опасная мода по отношению к устойчивости эллипсоидальная ($n=2$), для заряженной кавитационной полости в жидкости

наиболее опасны высшие сферические гармоники. Рост наиболее опасных возмущений может стимулировать развитие конечного числа N стримеров. Из общих соображений ясно, что инкремент роста возмущений пропорционален

$\left(\frac{1}{m} \left| \frac{\partial^2 W}{\partial R^2} \right| \right)^{\frac{1}{2}}$ (m - приведенная масса), то есть пропорционален корню

квадратному из вариации потенциальной энергии. Так как последняя максимальна для $n = n_m$, то и наиболее опасные возмущения обладают наибольшим инкрементом и число стримеров $N \approx n_m$. Учитывая, что

$\Phi_0^2 R_{00}^2 / R_0^2 = \Phi_1^2$ и $\lambda = \left(\frac{\alpha}{p_0 R_{00}} \right) \frac{R_{00}}{R_0}$, можно произвести расчет критического

значения безразмерного потенциала Φ_{0*}^2 и n_m , пользуясь соотношением (5) и параметрами эксперимента [55]. Принимая, как прежде, $R_{00} = 0,04$ мм и

$\alpha = 1,84 \cdot 10^{-2}$ Н/м (n -гексан [101], получим $\lambda = 4,6 \cdot 10^{-2} (R_{00}/R_0)$ и

$$\Phi_{0*}^2 = 4,3 \cdot 10^{-2}, \quad n_m = 11, \quad R_0 = R_{00};$$

$$\Phi_{0*}^2 = 5,5 \cdot 10^{-2}, \quad n_m = 12, \quad R_0 = 1,5 R_{00}. \quad (2.41)$$

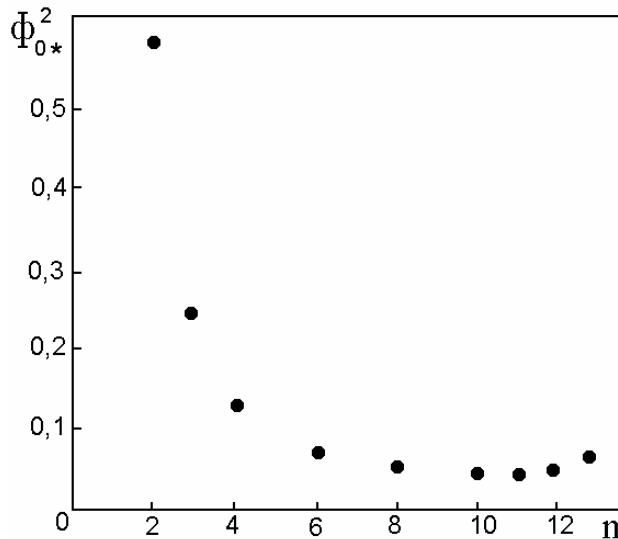


Рис. 2.12. Зависимость критического (в смысле потери устойчивости) безразмерного квадрата напряжения на пузыре от номера сферической гармоники

Зависимость $\Phi_{0*}^2(n)$ при $R_0 = R_{00}$ показана на рис. 2.12. Так как для образования и роста кавитационной полости необходимо $\Phi_0^2 > 1$, то из (2.41) видно, что рост полости происходит в сильно надкритическом по отношению к устойчивости сферического квазиравновесия режиме. Но так как возмущения растут с конечной скоростью, то в первое время (по крайней мере, во время образования полости до $R_0 = 1,5R_{00}$) поверхность ее может оставаться квазисферической и только впоследствии проявляются возмущения и возникают стримеры. В экспериментах [55] обнаружено, что при $R_0 = 0,2$ мм волновое число нарастающих возмущений $k \approx 500 \text{ с м}^{-1}$. Это соответствует $n = kR_0 = 10$. Из (2.41) имеем $n_m = 11$.

Таким образом, сравнение предложенной теории с экспериментальными данными позволяет надеяться, что ответственным за формирование высоковольтного ($E > 0,45 \text{ МВ/см}$) стримерного пробоя в жидких диэлектриках является кавитационный механизм.