

### 3. ЗАРЯДКА И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КАПЕЛЬ ВОДЫ В АТМОСФЕРЕ

#### 3.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ. ЭКСПЕРИМЕНТ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Приобретение каплями воды в атмосфере электрического заряда – это один из основных факторов формирования грозовой деятельности. Известно более десятка различных механизмов зарядки капель, которые достаточно подробно обсуждаются в литературе [14-19]. Условно все они могут быть разделены на два основных вида:

1. Естественные механизмы зарядки.
2. Индукционные механизмы зарядки во внешнем электрическом поле.

К естественным механизмам можно отнести, например, широко известный баллоэлектрический эффект – зарядку капель при их разбрызгивании, а также зарядку при соударениях и контактах. Основополагающую роль в зарядке капель за счет естественных механизмов играет двойной электрический слой, образующийся на границе вода – воздух.

Индукционные механизмы зарядки реализуются под влиянием внешнего электрического поля. Основополагающую роль при этом играет эффект поляризации проводящей капли. В результате поляризации капля может селективно захватывать или терять ионы одного знака, заряжаясь при этом. Важными характеристиками процесса зарядки капли являются характерное время зарядки и максимальный заряд, приобретаемый каплей. Многочисленными исследованиями показано [14, 17, 18], что для сферических частиц максимальный заряд, приобретаемый в результате индукционной зарядки, равен

$$q_m = c_a \epsilon_0 E_0 R^2, \quad (3.1)$$

$E_0$  - напряженность однородного внешнего поля,  $R$  - радиус капли,  $c_a$  - постоянный множитель, зависящий от конкретного механизма зарядки, который будем называть коэффициентом аккомодации. Наибольшее значение коэффициента аккомодации для сферических частиц равно  $12\pi$ .

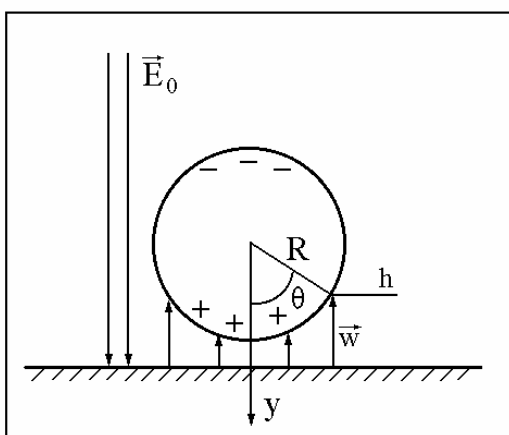


Рис. 3.1. Капля, неоднородно испаряющаяся во внешнем электрическом поле

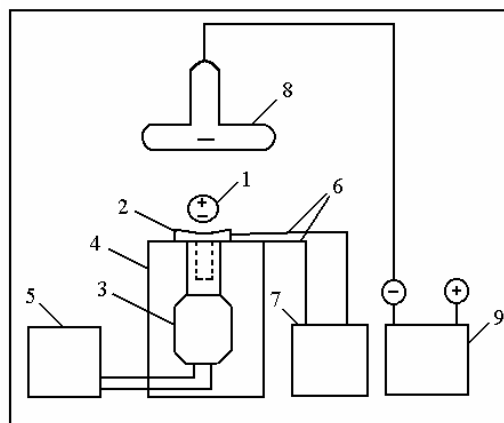


Рис. 3.2. Схема экспериментальной установки по наблюдению зарядки и левитации капель в условиях пленочного кипения

Отметим, что все известные индукционные механизмы зарядки предполагают внешнюю среду электропроводной. Например, возможна зарядка частиц в униполярно проводящей среде, в этом случае кинетика зарядки определяется уравнением Потенье [14]. Если внешняя среда омически проводящая, то зарядка частицы возможна, если, например, отличаются величины подвижностей ионов различных знаков [14, 16].

Ниже предлагается и анализируется механизм зарядки проводящей капли в непроводящей среде во внешнем электрическом поле за счет неоднородного испарения вещества капли [171, 174, 176]. Качественно механизм зарядки выглядит так. Пусть идеально поляризующаяся капля находится во внешнем поле и более интенсивно испаряется снизу (рис.3.1). Тогда вместе с молекулами вещества капли будут испаряться и ионы, в результате капля приобретет избыточный заряд.

Предлагаемый механизм зарядки капли сразу же позволяет объяснить экспериментально установленный, так называемый, зеркальный эффект Симпсона [19]. Заключается он в том, что заряд каплей дождя в атмосфере противоположен направлению напряженности электрического поля атмосферы (за положительное направление принимается направление вертикально вниз). Результаты экспериментального наблюдения зеркального эффекта представлены на рис.3.3, взятого из [19].

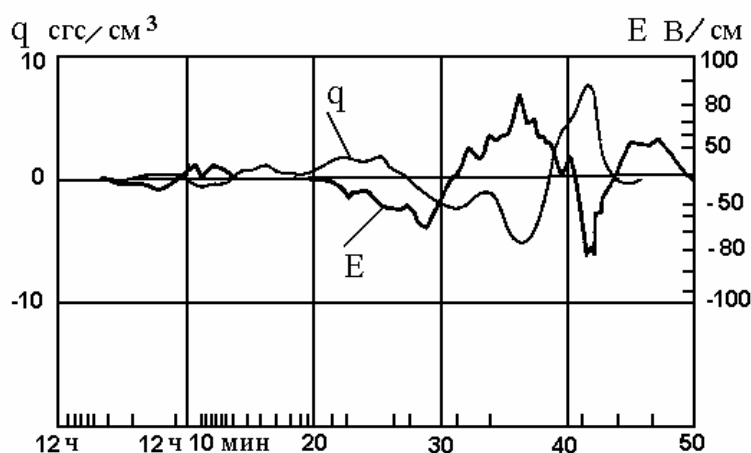


Рис. 3.3. Экспериментально зафиксированный зеркальный эффект Симпсона (из[19])

Для моделирования капли воды, падающей и испаряющейся в атмосфере во внешнем электрическом поле, была собрана лабораторная установка, схематически показанная на рис.3.2, где 1 - капля, 2 - теплоотдающий элемент, ввинченный в жало паяльника 3, 4 - теплоизоляция для увеличения теплосъема с теплоотдающего элемента, 5 - ЛАТР, 6 - термopapa, подключенная к милливольтметру 7 для регулировки температуры теплоотдающего элемента, 8 - электрод, 9 - высоковольтный разрядник «Разряд-1». В качестве блока питания разрядника использовался выпрямитель ВС -24М. Опыты с дистиллированной водой проводились при температуре теплоотдающего элемента около 230°C. Пипеткой капля подавалась на теплоотдающий элемент, зависала над ним на

паровой подушке (явление Лейденфроста) и медленно испарялась, уменьшаясь в размерах. Во время такого режима испарения на электрод 8 плавно или скачком подавалось высокое напряжение (до 25 кВ). Величина потенциала электрода оценивалась по показаниям вольтметра выпрямителя. При этом зависимость высоковольтного напряжения от напряжения питания считалась прямо пропорциональной и также было известно, что напряжению питания 12 В соответствует максимальное напряжение 25 кВ. Напряженность поля вблизи капли менялась перемещением по вертикали электрода 8. Независимо от полярности электрода 8 наблюдались следующие эффекты. При плавном увеличении напряжения до 20 кВ капли вели себя двояко: 1) капля подлетала слегка вверх, с ее поверхности вылетали мелкие брызги и она падала обратно на теплоотдающий элемент; 2) капля продолжала испаряться и при поданном напряжении, слегка вытягиваясь вдоль поля, затем по достижении некоторых размеров взлетала на электрод 8. То или иное поведение капли зависело от величины напряженности поля и размеров капли. Аналогично вели себя капли этилового спирта. Часть экспериментов была заснята на видеопленку и фотопленку и будет обсуждена ниже.

Взлет капли к электроду может быть обусловлен двумя причинами.

1. Капля во внешнем электрическом поле поляризуется и втягивается в область более сильного поля, т.е. к электроду 8. В этом случае условие взлета имеет вид

$$P \left| \frac{\partial E}{\partial y} \right| > mg. \quad (3.2)$$

Ось  $y$  направлена вертикально вниз,  $P$  - дипольный момент капли.

2. Капля каким-либо образом приобретает заряд  $q$  и под действием силы Кулона взлетает. В первом мультипольном приближении, считая электрическое поле однородным, условие взлета в этом случае можно записать так:

$$qE > mg \quad (3.3)$$

Оценим сначала возможность выполнения неравенства (3.2). Для этого найдем напряженность электрического поля в точке локализации капли, считая, что эта точка находится на оси диска радиуса  $r$ , который равномерно заряжен с плотностью  $\sigma_s$ . Тогда на расстоянии  $y$  от диска напряженность равна

$$E = 2\pi\sigma_s k \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{y}\right)^2}} \right), \text{ а градиент: } \left| \frac{\partial E}{\partial y} \right| = \frac{2\pi\sigma_s k r^2}{y^3 \left( 1 + \left(\frac{r}{y}\right)^2 \right)^{3/2}}. \quad (3.4)$$

Плотность поверхностного заряда оценим по формуле  $\sigma_s = \frac{Q}{1 + \frac{C_2}{C_1} S_1}$ ,  $Q$  -

полный заряд электрода, равный

$$Q = \varphi(C_1 + C_2) = \varphi C. \quad (3.5)$$

Здесь  $S$  и  $C_{1,2}$  - площадь поверхности и емкость дисковой и цилиндрической частей электрода соответственно (рис.3.3). Емкости  $C_{1,2}$  рассчитаем, заменив диск сплюснутым, а цилиндр вытянутыми эллипсоидами. Тогда [93]

$$C_1 = a_1 \frac{\sqrt{1 - (b_1/a_1)^2}}{\arccos(b_1/a_1)}, \quad C_2 = b_2 \frac{\sqrt{(a_2/b_2)^2 - 1}}{\text{arch}(a_2/b_2)}.$$

При параметрах электрода  $a_1 = 2,5$  см,  $b_1 = 0,5$  см,  $a_2 = 1,6$  см,  $b_2 = 0,5$  см получаем  $C = C_1 + C_2 = 4,4$  см =  $4,9 \cdot 10^{-12}$  Ф. В серии опытов, которая обрабатывается в настоящей работе, расстояние  $y$  от электрода до нагревателя было равно  $\sim 1,7$  см, а потенциал электрода  $\varphi$  около 21 кВ. Принимая  $y = 1,7$  см,  $r = 2,5$  см,  $\varphi = 21$  кВ и выполняя дальнейшие расчеты по (3.3)-(3.5), найдем

$$\left| \frac{\partial E}{\partial y} \right| = 2,0 \cdot 10^7 \text{ В / м}^2, \quad E = 3,8 \cdot 10^5 \text{ В / м}.$$

Каплю здесь будем считать почти сферической, тогда дипольный момент шара равен [93]  $P = \frac{1}{k} R_0^3 E$ ,  $R_0$  - радиус капли. Примем из опытов  $R_0 = 2$  мм, в этом случае величина поляризационной силы  $P \left| \frac{\partial E}{\partial y} \right| = 6,8 \cdot 10^{-6}$  Н. Оценка силы тяжести, действующей на каплю, дает  $mg = 3,3 \cdot 10^{-4}$  Н. Таким образом, поляризационные силы не могут быть ответственными за взлет капли и ее взлет обусловлен силой, действующей на приобретенный заряд капли со стороны внешнего поля.

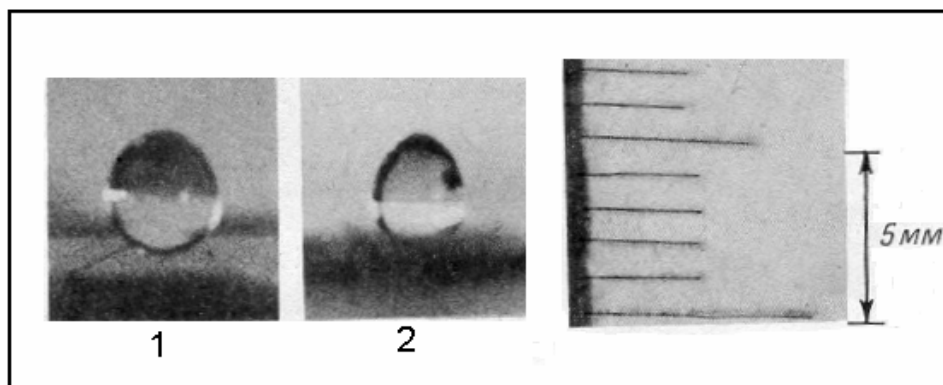


Рис. 3.4. Фотографии каплей спирта -1 и воды - 2, испаряющихся над горячей поверхностью в вертикальном электрическом поле

На рис. 3.4 приведены фотографии каплей спирта - 1 и воды - 2 в моменты времени, предшествующие их взлету. Оценка отношения полуосей эллипсоидальных форм капель по фотографиям составляет  $\beta_1 = 1,06$ ,  $\beta_2 = 1,09$ .

Перейдем к обсуждению возможного механизма зарядки капель.

Как известно разделение зарядов в проводнике при наложении внешнего поля и его экранировка происходят за время порядка времени релаксации  $\tau_1 = \epsilon_0 \epsilon / \sigma$ .  $\sigma$ ,  $\epsilon$  - удельная электропроводность и диэлектрическая проницаемость среды. Для дистиллированной воды это составляет  $\tau_1 \approx 10^{-5}$  с. Заряды сосредотачиваются в

тонком диффузном слое, толщина этого слоя определяется радиусом экранирования Дебая-Хюккеля

$$h_e = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon k_B T b_e}{e \sigma}},$$

$e$  - заряд ионов,  $b_e$  - их подвижность,  $k_B$  - постоянная Больцмана. Принимая  $T = 300\text{K}$ ,  $b_e = 10^{-7} \text{ м}^2 / (\text{сВ})$ ,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ , для дистиллированной воды получим  $h_e \sim 10^{-7} \text{ м}$ . В сферических каплях радиуса  $\sim 1 \text{ мм}$  сферический слой толщины  $h_e$  можно считать плоским и для объемной плотности зарядов в жидкости вблизи поверхности записать

$$\rho_e = \text{div}(\epsilon_0 \epsilon \vec{E}) \approx \frac{\epsilon_0 E_{1r} - \epsilon_0 \epsilon E_{2r}}{\Delta r} = \frac{\epsilon_0 E_r}{h_e}.$$

Считаем, что капля проводящая и внутри ее поля нет  $E_{2r} = 0$ . При этом если сферическая капля радиуса  $R$  имеет заряд  $q$  и находится в однородном электрическом поле, напряженностью  $E_0$ , то на ее поверхности [14]

$$E_r = 3E_0 \cos\theta + \frac{kq}{R^2}, \quad (3.6)$$

$\theta$  - полярный угол (рис.3.1). Как будет видно в дальнейшем, в иерархии времен время релаксации  $\tau_1$  наименьшее. Поэтому при всех других переходных процессах распределение заряда и поля в капле будем считать установившимся. Наибольшее время интересующих нас переходных процессов составляет порядка нескольких секунд. Это позволяет пренебречь изменением массы капли при ее испарении. Кроме того, форму ее будем считать сферической. Пренебрежем также всеми другими механизмами зарядки капли кроме зарядки в результате испарения ионов, считая внешнюю среду идеальным диэлектриком, а концентрацию испарившихся ионов малой. Если жидкость испаряется с поверхности, то через единицу поверхности существует поток массы равный  $j_m = \rho / \nu_e$ . При этом в системе отсчета,

связанной с поверхностью, можно считать, что сама жидкость движется к поверхности со скоростью  $v_e = j_m / \rho_l$ . Если жидкость заряжена, то плотность электрического тока, обусловленного этим движением жидкости, при условии отсутствия существенного проскальзывания ионов относительно нейтральной жидкости в приповерхностной области, равна

$$j_n = \rho_e v_e = \frac{\rho_e}{\rho_l} j_m = \frac{\epsilon_0 E_r j_m}{\rho_l h_e}. \quad (3.7)$$

Тогда заряд капли с течением времени меняется в соответствии с уравнением

$$\frac{dq}{dt} = - \oint j_n dS = - \frac{\epsilon_0}{\rho_l h_e} \oint E_r j_m dS. \quad (3.8)$$

Очевидно при однородном испарении со всей поверхности  $j_m = \text{const}$  и, следовательно, зарядка невозможна так как

$$\frac{dq}{dt} \sim q \sim q(t=0) = 0.$$

### 3.2. ЗАРЯДКА КАПЕЛЬ ПРИ ИСПАРЕНИИ В РЕЖИМЕ ПЛЕНОЧНОГО КИПЕНИЯ

Рассмотрим сначала случай испарения капли, наблюдавшийся в описанных выше экспериментах. Будем считать, что со стороны теплоотдающей поверхности на нижнюю поверхность капли падает однородный тепловой поток плотностью  $\vec{w}$  (рис.3.1). Тогда плотность потока массы (считаем, что все тепло идет на испарение) равна

$$j_m = w_n / \kappa = w \cos \theta / \kappa \quad \text{при } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{при } \theta > \frac{\pi}{2} \quad j_m = 0,$$

$\kappa$  - удельная теплота парообразования. Если предположить, что основным механизмом передачи тепла является теплопроводность, то



$$w = \lambda \frac{\Delta T}{h(\theta)} = \frac{\lambda \Delta T}{h_m + R(1 - \cos \theta)}, \quad (3.9)$$

$\lambda$  - теплопроводность пара,  $\Delta T$  - разность температур между поверхностью капли и теплоотдающей поверхностью,  $h_m$  - наименьшее расстояние между поверхностями. Подстановка (3.6) и  $j_m$  (с учетом (3.9) в (3.8) дает для заряда  $Z$  уравнение

$$\frac{dZ}{dt} = -\frac{\lambda \Delta T}{2\rho_l h_e \kappa R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \theta + Z) \cos \theta \sin \theta d\theta}{r^{-1} + (1 - \cos \theta)}. \quad (3.10)$$

Здесь  $Z$  и  $r$  - безразмерные величины, определенные так:  $Z = q/12\pi\epsilon_0 E_0 R^2$ ,  $r = R/h_m$ . Обозначим входящий в (3.10) интеграл  $J$ . Сделав замену переменных, нетрудно его вычислить. Получаем

$$J = (Z + \gamma)(\gamma \ln(1 + r) - 1) - 1/2, \quad \gamma = 1 + r^{-1}.$$

Тогда вместо (3.10) получим следующее уравнение:

$$\frac{dZ}{dt} = -\frac{1}{\tau_2} (Z + Z_m). \quad (3.11)$$

Здесь обозначено

$$Z_m = \gamma - \frac{1}{2(\gamma \ln(1 + r) - 1)}, \quad \tau_2 = \frac{2\rho_l h_e \kappa R}{\lambda \Delta T (\gamma \ln(1 + r) - 1)}. \quad (3.12)$$

Решение (3.11) имеет вид

$$Z = -Z_m (1 - \exp\{-t/\tau_2\}). \quad (3.13)$$

Видно, что по смыслу  $Z_m$  - максимальный заряд, приобретаемый каплей, а  $\tau_2$  - время зарядки. Сделаем оценки. При  $r \approx 1$  имеем  $Z_m \approx 0,71$ , тогда как при  $r \gg 1$  получаем  $Z_m \approx 1$ . Напомним, что поляризованная частица в электрическом поле в униполярной ионной среде приобретает максимальный заряд  $q_m = 12\pi\epsilon_0 E_0 R^2$ . В безразмерных единицах это как раз соответствует  $Z_m = 1$ .

При оценке времени зарядки  $\tau_2$  выберем теплопроводность пара  $\lambda = 2,4 \cdot 10^{-2}$  Вт/(мК), разность температур  $\Delta T = 100$  К. Тогда при  $r = 1$ ,  $R = 2$  мм из (3.12) получим  $\tau_2 \cong 1$  с. Последняя оценка находится в качественном согласии с экспериментом, изложенным выше. При подаче высокого напряжения скачком, капли практически сразу взлетали к верхнему электроду.

Найдем напряженность поля, при которой капля радиусом 2 мм, получившая максимальный заряд  $q_m$ , может взлететь вверх, то есть будет выполняться условие

$$q_m E_0 \geq mg.$$

Отсюда

$$E_0 \geq \frac{1}{3} \sqrt{\frac{R \rho_l g}{\epsilon_0}} \approx 5 \cdot 10^5 \text{ В/м.}$$

Полученный результат также близок к экспериментальному, согласно которому  $E_0 \approx 4$  кВ/см.

Если масса капли достаточно велика, то при испарении в режиме пленочного кипения она принимает дискообразную форму [90]. Площадь нижней поверхности капли, с которой происходит испарение, представим в виде  $S = 4\pi R^3 / h$ ,  $R$  - радиус эквивалентной по объему сферы.  $h$  - толщину диска найдем из условия на его боковых границах:  $\rho g h / 2 = 2\alpha_s / h$ ,  $\alpha_s$  - коэффициент поверхностного натяжения. Отсюда  $h = \sqrt{2} a_s$ ,  $a_s$  - капиллярная постоянная воды. Если испарение происходит во внешнем электрическом поле, то капля заряжается. Тогда, вместо (3.8), для плотности поверхностного заряда  $\sigma$  можем записать уравнение

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{\epsilon_0}{\rho h_e} \left( E_n + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right) j_m, \quad E_n = -E_0.$$

Учитывая, что в данном случае  $j_m = \text{const}$  и при  $t = 0$ ,  $\sigma = 0$ , найдем

$$\sigma = \varepsilon_0 E_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right), \quad \tau_0 = \frac{\rho h_e}{j_m}.$$

Максимальный заряд будет равен  $q_m = \varepsilon_0 E_0 S$ . Для максимального заряда, в выбранных ранее единицах, получим  $Q_m = R / 3\sqrt{2}a_s$  ( $R$  - радиус эквивалентной по объему сферы). При  $R > 3\sqrt{2}a_s$  таким образом, имеем  $Q_m > 1$  или  $q_m > 12\pi\varepsilon_0 E_0 R^2$ .

### 3.3. ЗАРЯДКА КАПЕЛЬ ПРИ ИСПАРЕНИИ В КОНВЕКТИВНО-ДИФФУЗИОННОМ РЕЖИМЕ

Наибольший интерес представляет проявление рассматриваемого механизма зарядки капель в естественных условиях, то есть при падении капель в атмосфере [174, 176]. Для анализа этой ситуации рассмотрим сначала испарение капли при малых скоростях ее движения относительно воздуха, имеющего ту же температуру, что и капля. Как будет показано ниже время зарядки капли порядка нескольких секунд, поэтому будем пренебрегать изменением температуры капли и ее массы при испарении. Задача о стационарной конвективной диффузии вещества с поверхности капли, падающей в другой жидкости при малых числах Рейнольдса решена в [86]. Воспользовавшись результатами [86], для плотности потока массы пара имеем

$$j_m = \rho_2 (1 - \varphi) \sqrt{\frac{3D\eta v}{2\pi R(\eta + \eta_1)}} \frac{(1 + \cos\theta)}{\sqrt{2 + \cos\theta}}. \quad (3.14)$$

Здесь  $\rho_2$  - плотность насыщенного пара у поверхности капли,  $\varphi$  - относительная влажность воздуха,  $D$  - коэффициент диффузии пара,  $v$  - скорость падения капли относительно воздуха,  $\eta$ ,  $\eta_1$  - вязкости воздуха и воды соответственно. Теперь уравнение (3.8) преобразуется к виду

$$\frac{dZ}{dt} = -\frac{1}{\tau_3} \sqrt{\text{Re}}(1-\varphi)J_1, \quad \tau_3 = \frac{4h_e \rho_l R}{\rho_2} \sqrt{\frac{\pi(\eta + \eta_1)}{3D\nu\eta}}, \quad (3.15)$$

$\rho_l$  - плотность жидкости,  $\nu$  - кинематическая вязкость воздуха,  $\text{Re}$  - число Рейнольдса, определенное через диаметр капли. Интеграл  $J_1$  в данном случае равен

$$J_1 = \int_0^\pi \frac{(1 + \cos\theta)(\cos\theta + Z)}{\sqrt{2 + \cos\theta}} \sin\theta d\theta = \frac{4}{3}(Z + Z_m), \quad (3.16)$$

$$Z_m = \frac{6}{5} \left( \sqrt{3} - \frac{3}{2} \right) \approx 0,24.$$

Таким образом, если в (3.15) фиксированы значения числа  $\text{Re}$  и  $\varphi$  то для заряда капли имеем снова уравнение типа (3.11), но с другими значениями максимального заряда  $Z_m$  и времени  $\tau_3$  релаксации (зарядки). При  $\text{Re} = 1$ ,  $\varphi = 0,5$ ,  $R = 1 \text{ мм}$ ,  $\rho_2 = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ кг/м}^3$ ,  $D = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $\eta_1 = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ , время зарядки оказывается таким:  $\tau_3 = 3,7 \text{ с}$ . Во время падения капли в атмосфере ее скорость изменяется, поэтому процесс испарения нестационарный. Оценим время установления стационарной конвективной диффузии  $\tau_4$ . В [86] для оценки получено следующее соотношение:

$$\frac{\nu \tau_4}{R} \approx \left( \frac{\nu}{\pi D} \right)^{1/3}.$$

На начальных стадиях падения можно считать  $\nu \approx g\tau_4$ . Тогда для  $R = 1 \text{ мм}$  имеем

$$\tau_4 \approx \left( \frac{R}{g} \left( \frac{\nu}{\pi D} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{1/2} \approx 7,0 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

Так как найденное время существенно меньше времени установления скорости при падении капли в воздухе, то процесс диффузии при изменяющейся скорости можно считать квазистационарным.

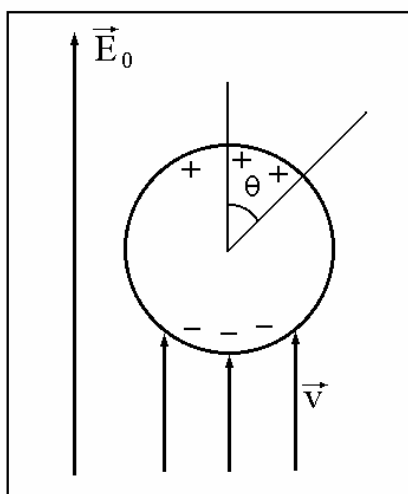


Рис. 3.5. Капля, испаряющаяся в потоке воздуха в электрическом поле

Представляет интерес выяснить как изменяются максимальный заряд капли и характерное время зарядки при увеличении числа Рейнольдса. Для этого примем упрощающие предположения. Будем считать кулоновскую силу малой по сравнению с силой тяжести, а процесс падения квазистационарным. Для определения зависимости  $q(t)$  по уравнению (3.8) необходимо знать распределение локального потока пара от капли по углу  $\theta$  (рис.3.5), то есть функцию  $j_m(\theta)$ . Задачи массообмена капель в потоке подробно рассмотрены в [102]. В частности в [102] установлено, что при числах Рейнольдса и Пекле больших единицы распределение  $j_m$  существенно зависит от отношения вязкостей капли и среды. Для воды и воздуха при условиях близких к нормальным отношение вязкостей  $\eta_1/\eta_2=56$  можно считать много большим единицы. Это обстоятельство не позволяет применить к капле воды асимптотическое решение  $j_m(\theta)$ , полученное в [102] и справедливое для капель при умеренных числах Рейнольдса и Пекле. Однако тот факт, что  $\eta_1/\eta_2 \gg 1$  позволяет рассматривать

массообмен капли воды в воздухе при  $Re > 1$  и  $Pe > 1$  как твердой частицы. Тогда, в соответствии с [102], для умеренных чисел Рейнольдса имеем

$$j_m = 0,776 \frac{\rho_2 D^{2/3} v^{1/3} (1 - \varphi)}{R^{2/3}} \left(1 + \frac{7}{8} Re\right)^{1/3} \cdot \sin \theta \cdot \left(1 - k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^{1/2} \cdot (2A(\pi - \theta, k))^{-1/3}, \quad (3.17)$$

$$A(\pi - \theta, k) = \int_0^{\pi - \theta} \sin^2 x (1 - k^2 \sin^2 x)^{1/2} dx, \quad k^2 = \frac{Re}{\sqrt{1 + 7Re/8}}.$$

Учитывая (3.17), обезразмерим уравнение (3.8), выбрав в качестве единиц измерения заряда прежнюю, а времени -  $[t] = \frac{Rh_e \rho}{(1 - \varphi) \pi \rho_2 v^{1/3} D^{2/3}} \equiv \tau_m$ . В

безразмерной форме уравнение (3.8) будет теперь иметь вид

$$\frac{dZ}{d\tau} = -Re^{1/3} (I_1 + ZI_0), \quad I_1 = \int_{\theta_1}^{\pi} J_m \cos \theta \sin \theta d\theta, \quad I_0 = \int_{\theta_1}^{\pi} J_m \sin \theta d\theta. \quad (3.18)$$

При этом  $\theta_1 = 0$ , если  $Re \leq 8$  и  $\theta_1 = 2 \arccos(1/k)$  при  $Re > 8$ , а  $J_m$  равна безразмерной части выражения для  $j_m(\theta)$  в (3.17). Интегрирование (3.18) по времени с учетом начального условия  $\tau = 0, Z = 0$  дает зависимость заряда капли от времени

$$Z = -\frac{I_1}{I_0} \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}\right), \quad \tau_0 = \frac{1}{Re^{1/3} I_0}. \quad (3.19)$$

Из полученного соотношения следует, что отношение  $|I_1|/I_0$  представляет собой модуль максимального заряда на капле  $Z_m$ , а  $\tau_0$  - время зарядки капли. Оба этих параметра в данном случае зависят только от числа Рейнольдса. Для определения искомых зависимостей интегралы в (3.17) и (3.18) рассчитывались численно.

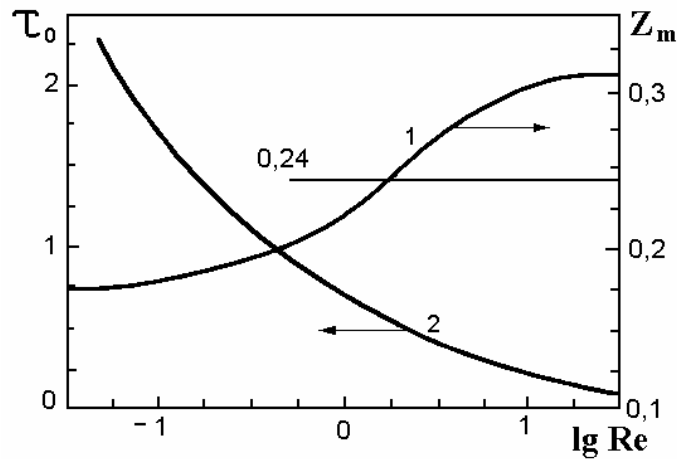


Рис. 3.6. Зависимости максимального заряда капли и времени зарядки от логарифма числа Рейнольдса

Результаты численного счета представлены на рис. 3.6. Оказалось, что  $Z_m$  слабо зависит от числа Рейнольдса (кривая 1), имея асимптоты 0,17 и 0,31 в единицах  $12\pi\epsilon_0 R^2 E_0$ . Напомним, что для капли жидкости в безинерционном приближении выше было получено  $Z_m = 0,24$ . Кривой 2 на рис.3.6 показана зависимость безразмерного времени зарядки капли от логарифма числа Рейнольдса. Для оценки реального времени укажем, что величина  $\tau_m$  для капли воды  $R = 1$  мм в сухом воздухе ( $\phi = 0$ ) и условий, близких к нормальным, порядка одной секунды  $\tau_m \sim 1$  с.

Наиболее интересным результатом здесь представляется результат о существовании нижних асимптот для величины заряда на капле при  $Re \rightarrow 0$ , которые равны  $0,17[q]$  для твердочастичного приближения и  $0,24[q]$  для жидкокапельного. Казалось бы, что при  $Re \rightarrow 0$  должно быть и  $Z_m \rightarrow 0$ . Противоречия, однако, здесь нет, если учесть, что при  $Re \rightarrow 0$  время зарядки стремится в бесконечность, то есть в обозримое время капля все-таки не приобретет заряда. Что касается верхней асимптоты, то учитывая приближенность твердочастичного решения можно распространить верхний предел максимального заряда до 1. Таким образом, будем считать, что при

испарении и зарядке капли в конвективно-диффузионном режиме ее максимальный заряд заключен в пределах  $0,24 \leq Z_m \leq 1$ .

Установленная слабая зависимость максимального заряда капли от числа Рейнольдса делает возможным распространить уравнение типа (3.15) на любые, приемлимые для капель воды, числа Рейнольдса. Более того, как показали исследования испарения капель в потоке воздуха в отсутствие электрического поля ветровой множитель  $\sqrt{\text{Re}}$  остается неизменным в широком диапазоне чисел Рейнольдса. Например, часто используемая формула Фреслинга для скорости испарения движущейся капли имеет вид [103, 104]

$$\frac{dm}{dt} = \left( \frac{dm}{dt} \right)_0 + \left( \frac{dm}{dt} \right)_0 \beta \sqrt{\text{ReSc}}^{\frac{1}{3}}, \quad \left( \frac{dm}{dt} \right)_0 = -4\pi R D \rho_2 (1 - \varphi).$$

Число Шмидта  $\text{Sc} = \nu / D$  воздуха можно принять равным 1,  $\beta$  - множитель Фреслинга, который выберем равным  $\beta = 0,276$  [104].

Учитывая сказанное, а также соотношения (3.11), (3.15), (3.16), можно предложить следующее феноменологическое уравнение зарядки капли при ее падении и неоднородном испарении в воздухе в электрическом поле

$$\frac{dZ}{dt} = -\frac{1}{\tau_5} (1 - \varphi) \sqrt{\text{Re}} (Z + Z_m), \quad \text{Re} = \frac{2Rv}{\nu}. \quad (3.20)$$

$v$  - скорость движения капли в системе отсчета связанной с воздухом; величина  $\tau_5$  имеет размерность времени. С учетом выражения для  $\tau_3$  в (3.15) и того, что  $\text{Sc} \approx 1$ , при  $\text{Re} > 1$  можно принять с точностью до несущественной константы

$$\tau_5 = \frac{h_e \rho_l R}{4\pi D \rho_2 \beta}.$$

### 3.4. ЗАРЯДКА И ЛЕВИТАЦИЯ КАПЕЛЬ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ПАДЕНИИ В АТМОСФЕРЕ



Рассмотрим теперь процесс нестационарного падения капли воды в атмосфере в однородном электрическом поле совместно с ее зарядкой в соответствии с уравнением (3.20). Запишем уравнение движения капли в воздухе в проекции на направление движения

$$m \frac{dv}{dt} = mg - F_c(v) - |q|E_0. \quad (3.21)$$

$F_c(v)$  - сила сопротивления среды, которую при малых  $Re \leq 30$  будем рассчитывать по Стоксу  $F_c(v) = 6\pi R v \eta$ , а при больших  $Re > 30$  по Ньютону

$$F_c(v) = \frac{\pi}{2} \rho v^2 R^2,$$

$\rho$  - плотность воздуха. Как показывают вышеизложенные эксперимент и теория, при преимущественном испарении снизу сила Кулона, действующая на каплю, всегда направлена вверх, поэтому она входит в (3.21) со знаком минус.

Уравнение (3.21) удобно записать в безразмерной форме, вводя безразмерный радиус (число Бонда):  $Bo = R/a_s$ ; безразмерную напряженность поля:

$$N_a = \left( \frac{\epsilon_0 E_0^2 a_s}{4\alpha_s} \right)^{1/2}; \text{ безразмерную скорость: } u = v \frac{2a_s}{v}; \text{ безразмерный заряд:}$$

$Z_1 = ZBo^2$ . Тогда вместо (3.21) получим следующее уравнение:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\tau} \left( 1 - 18 \frac{|Z_1| N_a^2}{Bo^3} - F_2(u) \right); \quad (3.22)$$

$$F_2(u) = \begin{cases} 1,13 \cdot 10^{-6} u / Bo^2, & Re = uBo \leq 30, \\ 4,71 \cdot 10^{-8} u / Bo^2, & Re = uBo > 30. \end{cases}$$

Отметим, что величина  $\tau$  имеет размерность времени, но не имеет смысла характерного времени зарядки. Уравнение для заряда капли (3.20) получается следующим:

$$\frac{dZ_1}{dt} = -\frac{Bo^{3/2}}{\tau_5}(1-\varphi)\sqrt{u}\left(\frac{Z_1}{Bo^2} + Z_m\right) \quad (3.23)$$

Здесь, в соответствии с результатами предыдущего раздела, примем  $\tau_5 = 27,8$  с,  $Z_m = 0,24$  при  $Re \leq 1$ , если же  $Re > 1$ , то  $\tau_5 = 7,35$  с, а для максимального заряда капли возьмем верхний предел  $Z_m = 1$ . Внешними параметрами задачи (3.22), (3.23) являются относительная влажность  $\varphi$ , радиус капель  $Bo(R)$ , напряженность внешнего поля  $N_a(E_0)$  и начальные значения заряда капли и ее скорости.

Система уравнений (3.22), (3.23) интегрировалась численно с начальными условиями  $u(t=0) = Z_1(t=0) = 0$ . Установившееся решение для  $Z_1$  и  $u$  считалось найденным, если выполнялись условия  $\frac{Z_1}{Z_m} \geq 0,95$  и  $\frac{u}{u_s} \geq 0,95$ . При этом, так как  $u_s$  было неизвестно, для выполнения последнего условия в программе ставилось условие  $\frac{|u_{i+1} - u_i|}{u_{i+1}} \leq \frac{3}{19i}$ . Здесь  $i$ - число шагов интегрирования. Это условие соответствует утроенному времени релаксации скорости так как  $\exp(-3) \approx 0,05$ . Все расчеты были выполнены для относительной влажности  $\varphi = 0,8$ .

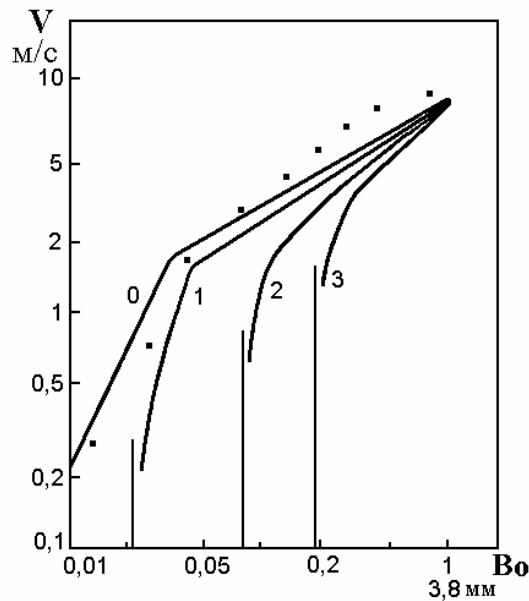


Рис. 3.7. Зависимости установившейся скорости падения капель от числа Бонда (размеров капель) при различных значениях напряженности поля. Масштаб логарифмический

Перейдем к обсуждению результатов интегрирования. На рис.3.7 в логарифмическом масштабе представлены графики зависимости установившейся скорости падения капель от их размеров при значениях напряженности поля  $E_0 = 0, 1, 2, 3$  кВ/см ( $N_a = 0; 0,0012; 0,0048; 0,0108$  - соответственно). Видно, что при заданной напряженности поля продолжают падать вниз с установившейся скоростью только те капли, размеры которых находятся правее вертикальных прямых, остальные левитируют. Весь спектр капель ограничен сверху из-за неустойчивости их по отношению к дроблению в потоке воздуха, поэтому во всех расчетах полагалось  $Bo \leq 1$ .

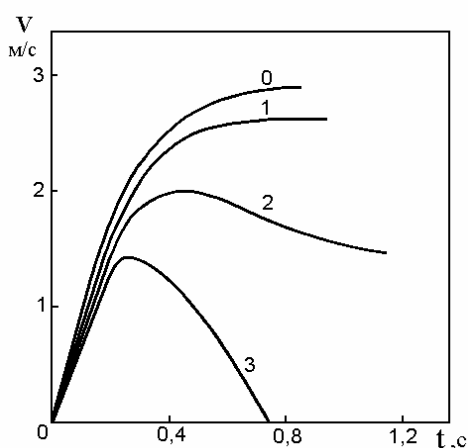


Рис. 3.8. Зависимости скорости падения капли от времени при разных напряженностях поля ( $Bo = 0,1$ ). Кривая 3 соответствует левитации

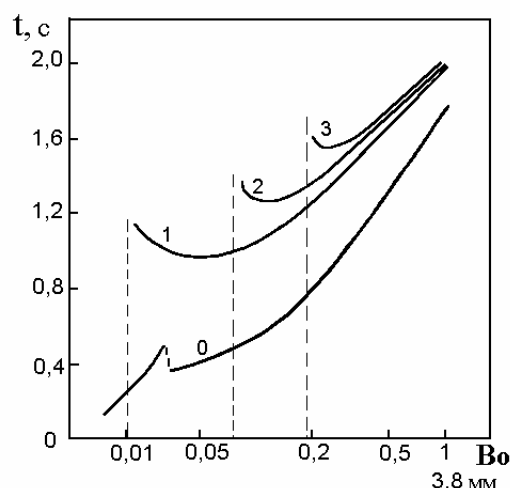


Рис. 3.9. Зависимости времени установления стационарного режима падения капли от числа Бонда (размеров капель) при различных значениях напряженности поля

Характерные зависимости скорости падения капель от времени при тех же четырех значениях напряженности поля и  $Bo = 0,1$  (для воды  $R = 0,38$  мм) показаны на рис.3.8. Такие капли при напряженности поля, при которой начинает выполняться условие  $qE_0 > mg$ , сначала увеличивают скорость падения (заряд при

этом еще не достигает максимального), затем уменьшают ее до нуля, то есть в конечном итоге движутся вместе с потоком воздуха, либо остаются неподвижными относительно земли, если неподвижен и воздух (левитируют, кривая 3). На рис.3.9 показаны зависимости времени установления стационарного режима падения капель в зависимости от их размера (полулогарифмический масштаб). Из графиков на рис.3.8 и рис.3.9 видим, что времена установления режима левитации существенно меньше характерных времен установления стационарного падения (при  $N_a(E_0) = \text{const}$ ). Расчеты показывают, что за время установления стационарного режима падения наибольшее расстояние, пролетаемое каплями всего спектра водности дождя, не превышает 10 м.

Численное решение системы (3.22), (3.23) проводилось и с другими начальными условиями. Например, скорость капли в начальный момент времени выбиралась равной установившейся скорости падения, а ее заряд равным нулю. При  $t > 0$  капля начинает двигаться в электрическом поле и начинается ее зарядка. Заряд начинает увеличиваться, а скорость уменьшаться. Наконец для капли данного размера устанавливается режим падения характерный и для начальных условий  $u = 0$ ,  $Z_1 = 0$ . Время перестройки движения при этом оказывается порядка секунд или долей секунд.

### 3.5. УСТОЙЧИВОСТЬ И ЛЕВИТАЦИЯ КАПЕЛЬ

В экспериментах, описанных выше, в разделе 3.1, было установлено, что относительно большие капли не могут взлететь вверх в электрическом поле, а с увеличением его напряженности или заряда на капле последние разбрызгиваются в результате развития ЭГД неустойчивости. Аналогичная ситуация, в принципе, может иметь место и для капель воды, падающих и заряжающихся в электрическом поле атмосферы. Представляет интерес найти и сформулировать условия, при которых равновесная форма капли еще устойчива и в связи с этим

возможна левитация капли. Будем считать, что равновесная форма капли не слишком сильно отличается от сферы. Сначала рассмотрим общий случай, когда заряд на капле не зависит от поля, то есть капля заряжалась неиндукционным способом. Запишем условие ее левитации

$$qE_0 \geq mg = \frac{4}{3}\pi\rho_l R^3 g. \quad (3.24)$$

Перейдем к безразмерным переменным, заряду  $Q_a$  и полю  $N_a$ , где  $N_a$  определено в предыдущем разделе, а  $Q_a$  определим так

$$Q_a = \left( \frac{kq^2}{16\pi\alpha a_s^3} \right)^{1/2}.$$

Тогда условие (3.24) в безразмерной форме запишется следующим образом:

$$Q_a N_a \geq \text{Bo}^3 / 6. \quad (3.25)$$

Условие устойчивости заряженной капли во внешнем поле запишем в виде (2.20), с учетом переопределения безразмерных переменных  $Q$  и  $N$ . Тогда получим

$$\frac{Q_a^2}{\text{Bo}^3} + \mu N_a^2 \text{Bo} < 1, \quad \mu = 1 / 0,052. \quad (3.26)$$

Очевидно, что одновременная выполнимость (3.25) и (3.26) возможна только при определенных значениях числа Бонда. Решая совместно эти неравенства, получим, что капля одновременно может быть устойчивой и левитировать, если ее число Бонда удовлетворяет условию

$$\text{Bo} < \text{Bo}_* = \sqrt{3} / \mu \approx 0,83. \quad (3.27)$$

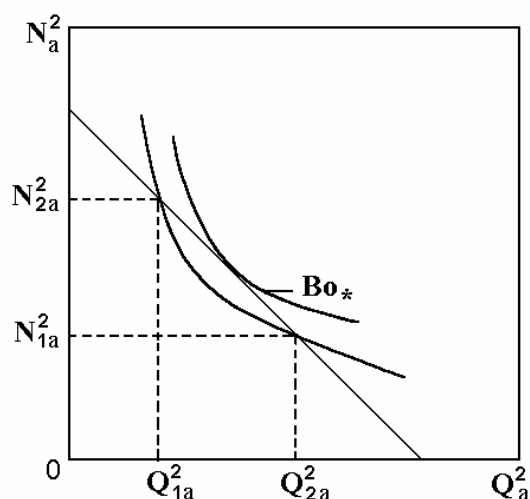


Рис. 3.10. Кривые нейтральной устойчивости и левитации заряженных капель в электрическом поле

При выполнении условия (3.27) левитация капель возможна только в определенном диапазоне зарядов и напряженностей поля, таких что  $Q_{1a} < Q_a < Q_{2a}$ ,  $N_{1a} < N_a < N_{2a}$  (рис.3.10). Границы области левитации определяются как корни системы уравнений, соответствующих неравенствам (3.25), (3.26).

Как уже было сказано, капли, падающие в атмосфере, могут быть неустойчивыми по отношению к их дроблению в потоке воздуха и вследствие этого их спектр по числу Бонда ограничен сверху  $Bo < 1$ . Неравенство (3.27), таким образом, означает принципиальную возможность левитации большей части спектра капель воды в атмосфере при достижении напряженности поля соответствующего значения. Так для предельного значения  $Bo = 0,83$  расчет дает  $E_0 \approx 5,1$  кВ/см.

Представляет интерес также провести анализ возможности левитации и устойчивости для капель, которые заряжаются за счет индукционного механизма. В этом случае заряд капли можно представить так  $q = c_a \epsilon_0 E_0 R^2$ . Тогда неравенства (3.25), (3.26) соответственно дают

$$N_a^2 \geq \frac{2\pi V_0}{3c_a}, \quad N_a^2 < \frac{1}{V_0(\mu + c_a^2 / 16\pi^2)}. \quad (3.28)$$

Совместное их выполнение возможно, если будет выполнено условие

$$V_0 < \left( \frac{3c_a}{2\pi(\mu + c_a^2 / 16\pi^2)} \right)^{1/2}. \quad (3.29)$$

Правая часть этого выражения является функцией коэффициента аккомодации  $c_a$  и монотонно растет с его ростом, достигая максимального значения  $V_{0*} = 0,80$  при  $c_a = 12\pi$ .

Таким образом, получаем, что и в этом случае почти весь спектр капель воды в атмосфере в принципе может левитировать в достаточно сильном электрическом поле.

В заключение отметим, что так как средние значения напряженности электрического поля в воздухе при грозе и тем более в ее отсутствие составляют менее 0,3 кВ/см, а для существенного проявления эффекта левитации капель требуются поля напряженностью 2-3 кВ/см, то ввиду кратковременности процесса зарядки капель и небольшого расстояния, пролетаемого ими за это время, все же можно ожидать проявления обсуждаемых эффектов в природе по типу резонансных.

### 3.6. НЕКОТОРЫЕ ЭФФЕКТЫ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КАПЕЛЬ ВОДЫ В АТМОСФЕРЕ

Взаимодействие капель воды в атмосфере имеет решающее значение при формировании осадков, гроз и других атмосферных явлений, поэтому требует всестороннего изучения. Хорошо известными явлениями, происходящими с каплями, являются такие, например, как электризация (зарядка), коагуляция, дробление, коронирование. При этом важно знать роль тех или иных факторов в

формировании явления. Очевидно, что электрическое поле у поверхности капель и электрические силы, действующие на них, являются одними из таких важных факторов, влияющих на ход процессов, происходящих с каплями. Следовательно, необходима разработка методов, позволяющих эффективно и с хорошей точностью рассчитывать эти параметры.

В часто цитируемой работе [105] (см. например, [17, 106, 107]), был предложен метод и произведены расчеты напряженностей поля на поверхности двух заряженных сферических частиц, находящихся во внешнем однородном поле, а также электрической силы их взаимодействия. Метод расчета в [105] достаточно громоздкий и трудновоспроизводим. В настоящей работе расчет напряженностей поля и силы взаимодействия, без учета внешнего поля, произведен более простым методом, основанным на методе электрических изображений [108]. Расчеты, результаты которых опубликованы в [178, 180] и излагаются ниже, показали также, что на малых расстояниях между частицами результаты [105] не верны из-за большой погрешности численного счета сумм рядов. Кроме того, результаты настоящих расчетов применены к анализу возможности некоторых нетрадиционных эффектов электростатического взаимодействия капель в атмосфере [180].

### **3.6.1. Вывод соотношений для расчета напряженности поля и силы взаимодействия**

Рассмотрим два проводящих шара радиусами  $R_1$ ,  $R_2$ , находящиеся на расстоянии  $l$  между центрами и имеющие заряды  $q_1$  и  $q_2$ . В результате электростатической индукции заряд первого шара создает во втором



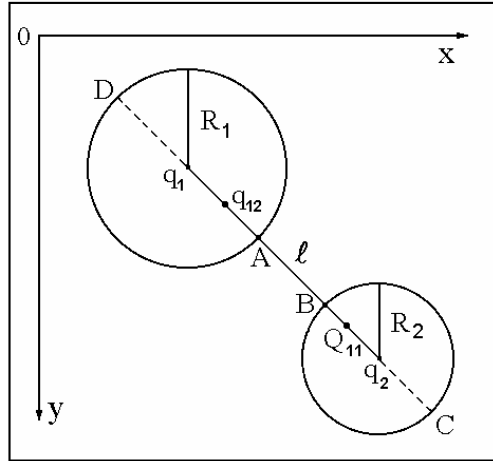


Рис. 3.11. Взаимное расположение двух проводящих заряженных шаров (капель)

электрическое изображение  $Q_{11}$ , которое, в свою очередь, является источником вторичного изображения  $q_{12}$  в первом шаре (рис.3.11). Таким образом, напряженность поля в точке  $A$  создается бесконечным числом зарядов-изображений, формирующихся в обоих шарах. Если заряжен только первый шар, то напряженность поля в точке  $A$  представляется в виде

$$E_{A1} = k \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{1n}}{r_{1n}^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{1n}}{R_{1n}^2} \right), \quad k = 1/4\pi\epsilon_0 \quad (3.30)$$

Используя результаты работы [109], можно записать

$$q_{1n} = q_1 \frac{\gamma \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{sh} n \beta [\gamma + \operatorname{sh}(n-1)\beta / \operatorname{sh} n \beta]}, \quad Q_{1n} = -q_1 \frac{\gamma \operatorname{sh} \beta}{r(1 + \gamma) \operatorname{sh} n \beta}, \quad (3.31)$$

$$r_{1n} = \frac{1}{1 + \gamma} - r + \frac{r\gamma}{\gamma + \operatorname{sh}(n-1)\beta / \operatorname{sh} n \beta}, \quad (3.32)$$

$$R_{1n} = r - \frac{1}{1 + \gamma} - \frac{r\gamma [\gamma + \operatorname{sh}(n-1)\beta / \operatorname{sh} n \beta]}{1 + \gamma^2 + 2\gamma \operatorname{ch} \beta}.$$

Здесь обозначено  $r = l/(R_1 + R_2)$ ,  $\gamma = R_2/R_1$ , а параметр  $\beta$  связан с расстоянием между центрами шаров соотношением

$$\operatorname{ch}\beta = \frac{r^2(1+\gamma)^2 - (1+\gamma^2)}{2\gamma}. \quad (3.33)$$

Пусть теперь первый шар не заряжен  $q_1 = 0$ , а второй имеет заряд  $q_2$ . Тогда для напряженности поля в точке  $A$  аналогично имеем

$$E_{A2} = k \left( - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{2n}}{r_{2n}^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{2n}}{R_{2n}^2} \right), \quad (3.34)$$

$$q_{2n} = q_2 \frac{\operatorname{sh}\beta}{\operatorname{sh}n\beta [1 + \gamma \operatorname{sh}(n-1)\beta / \operatorname{sh}n\beta]}, \quad Q_{2n} = -q_2 \frac{\operatorname{sh}\beta}{r(1+\gamma)\operatorname{sh}n\beta}, \quad (3.35)$$

$$r_{2n} = -\frac{1}{1+\gamma} + \frac{r}{1+\gamma \operatorname{sh}(n-1)\beta / \operatorname{sh}n\beta},$$

$$R_{2n} = \frac{1}{1+\gamma} - \frac{r[1+\gamma \operatorname{sh}(n-1)\beta / \operatorname{sh}n\beta]}{1+\gamma^2+2\gamma \operatorname{ch}\beta}. \quad (3.36)$$

В случае, когда оба шара имеют отличные от нуля заряды, напряженность поля в точке  $A$  равна

$$E_A = E_{A1} + E_{A2} = \frac{kq_1}{R_1^2} K_1. \quad (3.37)$$

Напряженность поля в точке  $B$  (рис.3.11) рассчитывается по тем же формулам, что и в точке  $A$ , но с заменой  $\alpha \rightarrow 1/\alpha$  ( $\alpha \equiv q_2/q_1$ ),  $\gamma \rightarrow 1/\gamma$  и соответственно равна

$$E_B = \frac{kq_2}{R_2^2} K_2. \quad (3.38)$$

Определенные таким образом величины  $K_1$  и  $K_2$  по сути представляют собой коэффициенты усиления собственного поля каждого из шаров. Для нахождения силы, действующей на каждый из шаров, запишем сначала энергию их взаимодействия в виде [108]

$$W = \frac{1}{2} (q_1^2 s_{11} + 2q_1 q_2 s_{12} + q_2^2 s_{22}).$$

Здесь  $s_{11}$ ,  $s_{12}$ ,  $s_{22}$  - потенциальные коэффициенты. Удобнее, однако, перейти к емкостным коэффициентам, так как выражения для них хорошо известны. Тогда в безразмерной форме энергия взаимодействия будет иметь вид

$$W = \frac{(1 + \gamma)}{2\alpha} \left[ \frac{\alpha^2 c_{11} - 2\alpha c_{12} + c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \right]. \quad (3.39)$$

Энергия записана в единицах  $k |q_1 q_2| / (R_1 + R_2)$ , а емкостные коэффициенты в единицах  $R_1/k$ . Выражения для  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{22}$  в выбранных единицах могут быть записаны так [108]

$$\begin{aligned} c_{11} &= \gamma \operatorname{sh} \beta \sum_{n=1}^{\infty} [\gamma \operatorname{sh} n\beta + \operatorname{sh}(n-1)\beta]^{-1}, \\ c_{12} &= -\frac{\gamma \operatorname{sh} \beta}{r(1 + \gamma)} \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sh} n\beta)^{-1}, \\ c_{22} &= \gamma \operatorname{sh} \beta \sum_{n=1}^{\infty} [\operatorname{sh} n\beta + \gamma \operatorname{sh}(n-1)\beta]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Выражение для силы получается дифференцированием (3.39) по расстоянию между центрами шаров  $l$ . В единицах  $k |q_1 q_2| / (R_1 + R_2)^2$  оно может быть представлено в форме

$$F_r = -\frac{\partial W}{\partial r} = -\frac{r(1 + \gamma)^3}{2\alpha\gamma \operatorname{sh} \beta} \cdot f(c_{ik}, c_{ik}'). \quad (3.41)$$

Здесь посредством  $f$  обозначена производная по  $\beta$  от выражения, стоящего в (3.39) в квадратных скобках

$$f = \frac{(\alpha^2 c'_{11} - 2\alpha c'_{12} + c'_{22})(c_{11}c_{22} - c_{12}^2) - (\alpha^2 c_{11} - 2\alpha c_{12} + c_{22})(c'_{11}c_{22} + c_{11}c'_{22} - 2c_{12}c'_{12})}{(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)^2}$$

Производные от емкостных коэффициентов по  $\beta$  равны

$$c'_{11} = -\operatorname{sh}\beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} n\beta (n + \gamma(n-1)\operatorname{ch}\beta) - \gamma(n-1)\operatorname{sh} n\beta \operatorname{sh}\beta}{(\operatorname{sh} n\beta (1 + \gamma \operatorname{ch}\beta) - \gamma \operatorname{ch} n\beta \operatorname{sh}\beta)^2} + c_{11} \operatorname{cth}\beta,$$

$$c'_{22} = -\operatorname{sh}\beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} n\beta (\gamma n + (n-1)\operatorname{ch}\beta) - (n-1)\operatorname{sh} n\beta \operatorname{sh}\beta}{(\operatorname{sh} n\beta (\gamma + \operatorname{ch}\beta) - \operatorname{ch} n\beta \operatorname{sh}\beta)^2} + c_{22} \operatorname{cth}\beta,$$

$$c'_{12} = c_{12} \operatorname{cth}\beta - c_{12} \frac{\operatorname{sh}\beta}{(1 + \gamma)^2 r^2} + \frac{\operatorname{sh}\beta}{(1 + \gamma)r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{ch} n\beta}{\operatorname{sh}^2 n\beta}.$$

Безразмерная сила и коэффициенты усиления поля на поверхности каждого из шаров рассчитывались по полученным формулам на компьютере. Для этого все слагаемые в суммах выражались через параметр  $z = e^{-\beta}$  ( $\beta$  по-прежнему определяется соотношением (3.33)). Счет сумм прекращался, когда параметр  $z$  достигал машинного нуля, то есть  $10^{-38}$  в обычном режиме счета, а проверочные расчеты проводились в режиме двойной точности, вплоть до  $10^{-80}$ .

### 3.6.2. Результаты расчетов напряженности поля и силы

Наиболее подробно были рассмотрены два случая взаимодействия разных по размеру заряженных проводящих шаров, часто встречающиеся в теории и на практике: а) шары с равными потенциалами относительно бесконечности; б) заряды шаров относятся как квадраты их радиусов. Случай шаров с равными потенциалами относительно бесконечности означает  $q_2 / q_1 = R_2 / R_1$ , то есть  $\alpha = \gamma$ . Этот случай может иметь место, если зарядка шаров до их сближения происходила от одного и того же источника напряжения, либо потенциалы выровнялись за счет коронного тока. Тогда, как и следовало ожидать,

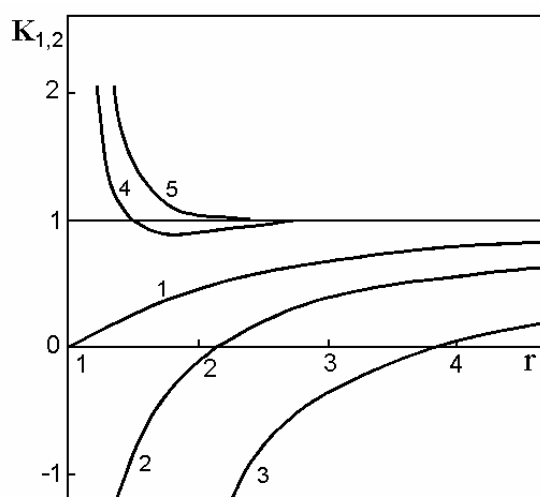


Рис. 3.12. Зависимости коэффициентов усиления напряженности поля на поверхности шаров от безразмерного расстояния между их центрами. 2, 3 - меньший шар, 4, 5 - больший шар

коэффициенты усиления поля в точках  $A$  и  $B$  (рис.3.12, кривая 1) монотонно возрастают от нуля до единицы с увеличением расстояния между шарами. При этом напряженность поля на большем шаре несколько быстрее стремится к единице, чем таковая на меньшем.

Гораздо сложнее дело обстоит с силой взаимодействия. При  $\alpha = \gamma \neq 1$  сила на близких расстояниях между шарами является силой притяжения, неограниченно возрастающей при сближении шаров. При удалении шаров сила меняет знак, становясь силой отталкивания. затем достигает максимума и с дальнейшим увеличением расстояния между шарами начинает убывать по закону, приближающемуся к кулоновскому. Типичный график зависимости силы от

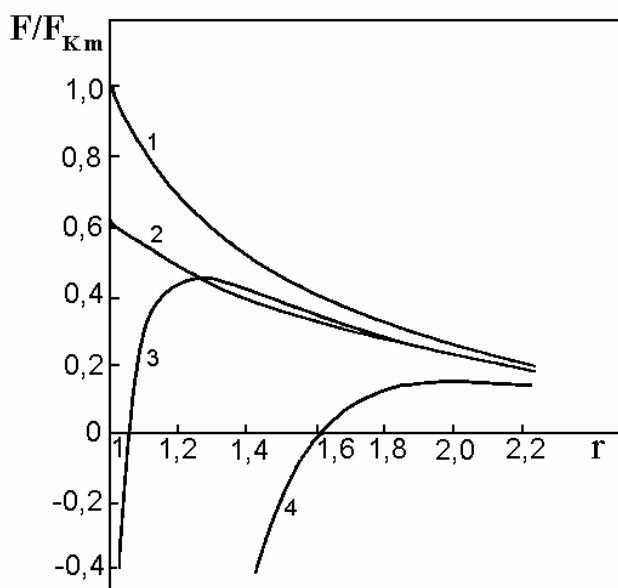


Рис. 3.13. Зависимости безразмерной силы, действующей на шары, от безразмерного расстояния между их центрами. Кривая 1 - закон Кулона, кривая 2 - одинаковые одинаково заряженные шары

расстояния между центрами шаров для  $\alpha = \gamma = 4,3$  показан на рис. 3.13, кривой 3. Координаты нулевой силы и координаты максимальной силы изменяются в зависимости от величины  $\alpha(\gamma)$  в пределах  $1 \leq r_0 \leq 1,08$  (нулевая сила) и  $r_0 < r_m \leq 1,27$  (максимум силы). Кривая 1 соответствует кулоновскому закону.

Особый интерес представляет случай одинаковых шаров  $R_1 = R_2$  или  $\alpha = \gamma = 1$ . В этом случае задачи о напряженности поля и силе взаимодействия шаров становятся автомодельными. В частности, расчет силы отталкивания шаров в зависимости от расстояния между их центрами дает кривую 2 на рис.3.13, а на близких расстояниях между шарами имеем асимптотическое решение  $F_r = 0,615F_{Km}$ , где  $F_{Km}$  - максимальное значение силы, рассчитанной в кулоновском приближении, то есть в случае, когда заряды шаров считаются сосредоточенными в их центрах. Для энергии соответствующее асимптотическое решение дает  $W = 0,885W_{Km}$ .

Если же заряды шаров разноименные  $\alpha = -\gamma = -1$ , то сила их взаимодействия при сближении бесконечно возрастает по асимптотическому закону

$$F_r = -\frac{4F_K}{S(\ln(2/S) + 1)^2}, \quad S = r - 1, \quad (3.42)$$

который установлен с использованием формулы суммирования Эйлера-Маклорена

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_1^{\infty} f(t) dt + \frac{1}{2}(f(1) + f(\infty)),$$

с последующим разложением результата в ряд Тейлора по  $\beta \ll 1$  [178]. Энергия взаимодействия при этом остается конечной и при сближении шаров стремится к  $2W_K$ .

Численный расчет напряженности поля в точках  $A$  и  $B$  показал, что в рассматриваемом случае  $\alpha = -\gamma = -1$  приближенная формула Пика [110]

$$E = \frac{1}{S} \left( 1 + 2S + \sqrt{(1 + 2S)^2 + 8} \right) \quad (3.43)$$

достаточно хорошо (с погрешностью не более 1%) описывает зависимость напряженности поля в точке  $A$  от расстояния между шарами при любых  $r > 1$  ( $S > 0$ ).

Перейдем к обсуждению результатов расчетов в случае, когда отношение зарядов шаров равно квадрату отношения их радиусов, то есть  $\alpha = \gamma^2$ . Этот случай может реализоваться на практике, если заряды шаров возникают в результате их индукционной зарядки во внешнем электрическом поле. В этом случае предельный заряд на шаре радиуса  $R$  равен  $q = c_a E_0 R^2$ . В этом случае наоборот неожиданно просто решается вопрос о силе взаимодействия шаров: она для всех расстояний между шарами является силой отталкивания. При небольших  $\gamma < 3$  сила отталкивания и в количественном отношении близка к таковой при  $\alpha = \gamma = 1$ . Однако с увеличением  $\gamma$  и  $\alpha$  сила отталкивания стремится уже к кулоновскому

пределу, то есть при  $\alpha = \gamma^2$  график зависимости силы от расстояния между центрами шаров всегда расположен между кривыми 1 и 2 на рис.3.13.

Коэффициенты усиления поля в случае  $\alpha = \gamma^2$  ведут себя следующим образом. На близких расстояниях между шарами поле усиливается так, что напряженности на поверхности каждого из шаров неограниченно возрастают при сближении шаров. При этом напряженность поля на поверхности меньшего шара (в точке  $A$ , рис.3.11) направлена внутрь шара, то есть отрицательна, если шары расположены достаточно близко. Соответствующие графики зависимости коэффициентов усиления поля от расстояния между центрами шаров показаны кривыми 2 ( $\gamma = 2, \alpha = 4$ ) и 3 ( $\gamma = 4, \alpha = 16$ ) на рис.3.12. Напряженность же поля на поверхности большего шара (в точке  $B$ , рис.3.11) направлена всегда от него (кривые 4, 5 на рис.3.12, которые также соответствуют  $\gamma = 2, \gamma = 4$ ). Видно, что при уменьшении  $\gamma$  до единицы кривые зависимости коэффициентов усиления поля от расстояния между шарами стремятся к зависимости  $E(r)$  для случая  $\alpha = \gamma = 1$ .

Отметим, что в работе [105] была решена более общая задача об определении напряженности поля в точках  $A$  и  $B$  (рис.3.11) и силы взаимодействия шаров. Однако результаты численных расчетов сил и напряженностей в [105] верны лишь качественно. Действительно, в отсутствии внешнего поля, при  $\gamma = 1, \alpha = -1$  и  $r = 1,005$  согласно [105] для безразмерной напряженности поля в точках  $A$  и  $B$  имеем  $E_{A,B} = 56,06$ , что почти в 4 раза меньше рассчитанной в настоящей работе по формулам (3.30)-(3.37) и по формуле Пика (3.43):  $E_{A,B} = 200,7$ . Существенные расхождения сохраняются и для других, не слишком больших расстояний между шарами. Вероятно, такие неудовлетворительные результаты [105] есть следствие недостаточной точности вычислений сумм рядов (счет суммы ряда в [105]



прекращался, если величина членов ряда становилась менее 0,1, тогда как в настоящей работе - менее  $10^{-38}$ ).

### 3.6.3. Эффекты взаимодействия заряженных капель

Используя полученные результаты, рассмотрим некоторые нетрадиционные эффекты взаимодействия заряженных капе

ль в атмосфере. В частности, сила притяжения, возникающая при взаимодействии одноименно заряженных капель, может способствовать их слиянию, которое сопровождается увеличением радиуса капли и заряда. Допустим, что до слияния капель для каждой из них выполнялось условие их устойчивости по Рэлею

$$Q_i^2 = \frac{kq_i^2}{16\pi\alpha_s R_i^3} < 1, \quad i=1, 2.$$

$\alpha_s$  - коэффициент поверхностного натяжения. Тогда возникает вопрос: будет ли образовавшаяся капля также устойчивой по Рэлею или найдется область параметров, в которой равновесие образовавшейся капли в виде сферы неустойчиво? Для ответа на вопрос запишем параметр Рэлея для образовавшейся капли в виде

$$Q^2 = \frac{k(q_1 + q_2)^2}{16\pi\alpha_s (R_1^3 + R_2^3)} = Q_1^2 \cdot \frac{(1 + \alpha)^2}{1 + \gamma^3}.$$

Тогда условия устойчивости исходных капель и неустойчивости образовавшейся капли образуют следующую систему неравенств

$$Q_1^2 \frac{(1 + \alpha)^2}{1 + \gamma^3} \geq 1, \quad \frac{Q_1^2 \alpha^2}{\gamma^3} < 1, \quad Q_1 < 1. \quad (3.44)$$

Как было показано выше, в общем случае напряженность поля на поверхности капель сильно возрастает при их сближении и это может привести либо к их неустойчивости по Тейлору, либо к коронному или искровому разряду. Разряд ведет к выравниванию потенциалов капель. Но именно в случае равных

потенциалов напряженность поля на ближних поверхностях капель уменьшается при их сближении, делая неустойчивость по Тейлору и разряд маловероятными. Поэтому случай равных потенциалов капель  $\alpha = \gamma$  представляет особый интерес в отношении ответа на поставленный вопрос. Полагая в (3.44)  $\alpha = \gamma$ , получим следующую систему неравенств

$$\frac{Q_1^2(1+\gamma)}{(1-\gamma+\gamma^2)} \geq 1, \quad Q_1^2 < \gamma, \quad Q_1^2 < 1. \quad (3.45)$$

Удовлетворяя этой системе, найдем следующие границы интервалов изменения параметров, внутри которых выполняется условие неустойчивости образовавшейся капли по Рэлею

$$0,46 \leq Q_1^2 < 1, \quad 0,5 < \gamma < 2. \quad (3.46)$$

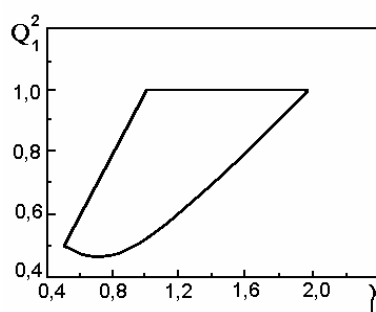


Рис.3.14. Выделена область параметров, внутри которой равновесие капли, образовавшейся в результате коагуляции двух меньших, неустойчиво по Рэлею

Полностью область параметров, о которых идет речь, выделена рис.3.14.

Для оценки возможности реализации эффекта слияния и неустойчивости капель в атмосферных условиях рассмотрим свободное падение двух капель, форма которых близка к сферической. Запишем уравнение движения капель, предполагая, что в начальный момент времени они находятся достаточно близко друг к другу и имеют пренебрежимо малую скорость относительно воздуха, а далее начинают свободно падать. В такой постановке задачи, когда скорости капель малы, можно пренебречь силами сопротивления воздуха и учитывать

только силы тяжести и электрические. Тогда имеем следующие уравнения движения центров масс капель, записанные в безразмерной форме

$$\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{j} \pm f_q \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r}, \quad r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|, \quad i = 1, 2. \quad (3.47)$$

Здесь  $\vec{j}$  - единичный вектор, направленный вертикально вниз; единица измерения длины прежняя, единица измерения времени  $[t] = \sqrt{(R_1 + R_2) / g}$ , величина  $f_q$  равна

$$f_q = \frac{3kq_1q_2}{4\pi\epsilon_0 g(R_1 + R_2)^2 R_1^3} \cdot f(r),$$

где  $f(r)$  рассчитывалась по формуле (3.41). При численном интегрировании (3.47) в плоскости  $x, y$  начальные скорости капель считались равными нулю, а их начальное расположение варьировалось. Для оценки возможности неустойчивости заряженных и находящихся во внешнем электрическом поле (его создает соседняя капля) капель использовался критерий, рассмотренный в разделе 2.3

$$N_e = \frac{kq^2}{16\pi\alpha_s R^3} + b \frac{\epsilon_0 E_s^2 R}{4\alpha_s}. \quad (3.48)$$

$E_s$  - напряженность внешнего поля на поверхности капли. Второе слагаемое в этом выражении ответственно за неустойчивость Тейлора при  $q=0$ , которая в однородном поле наступает при условии

$$\frac{\epsilon_0 E_0^2 R}{4\alpha_s} \geq 0,052. \quad (3.49)$$

$E_0$  - напряженность внешнего поля на большом удалении от капли. В момент наступления неустойчивости капля вытянута в эллипсоид с отношением полуосей  $\xi = 1,9$ . Следовательно, напряженность поля на поверхности капли (на вершине эллипсоида) равна [93]

$$E_s = \frac{E_0}{n_x(\xi)}, \quad n_x = \frac{1-e^2}{2e^3} (\text{Arth}e - 2e), \quad e = \frac{1}{\xi} \sqrt{\xi^2 - 1}.$$

Вычисления  $n_x$  при  $\xi = 1,9$  дают  $1/n_x = 5,45$  и тогда вместо (3.49) имеем условие

$$\frac{\varepsilon_0 E_s^2 R}{4\alpha_s} \geq 1,54$$

и, следовательно, коэффициент  $b$  в (3.48) можно принять равным  $b = 1/1,54$ . Тогда возможность неустойчивости поверхности капель при их сближении можно оценить по условию  $N_e \geq 1$ . Величина параметра  $N_e$  вычислялась в точках  $A, B, C, D$  (рис.3.11) в процессе численного счета координат падающих капель.

В результате численного моделирования совместного падения двух капель оказалось, что действительно существует область параметров, при которых в процессе сближения капель выполняется условие  $N_e < 1$ , капли сливаются, а после слияния для образовавшейся капли выполняется условие неустойчивости по Рэлею. В частности, это справедливо для капель радиусами 0,2 мм и 0,18 мм, имеющими заряды 0,04 нКл и 0,036 нКл. Таким образом, возможными результатами взаимодействия пары одноименно заряженных капель в атмосфере могут быть разлет, коагуляция с образованием одной устойчивой капли или дробление (неустойчивость) образовавшейся в результате коагуляции капли.

Также представляет интерес рассмотреть процесс сближения противоположно заряженных капель, имея в виду вопрос о доминирующем проявлении двух конкурирующих процессов: искрового пробоя между каплями и развитии неустойчивости их поверхности по Тейлору (заряды капель удовлетворяют условию устойчивости по Рэлею). Отметим, что этот вопрос является предметом дискуссий [18]. Для этого в процессе численного счета координат одинаковых  $\gamma = 1$ , но противоположно заряженных  $\alpha = -1$  капель в режиме падения рассчитывались напряженность поля в точке  $A (B)$  и параметр  $N_e$ , ответственный за неустойчивость по Тейлору. Чтобы судить о возможности пробоя, вычисленная

напряженность сравнивалась с напряженностью поля искрового пробоя, которая в зависимости от радиуса капель вычислялась по формуле [24]

$$E_* = 27,2 \left( 1 + \frac{0,54}{\sqrt{R}} \right) \text{ кВ/см.}$$

$R$  - радиус капель в см,  $E_*$  - пробивная напряженность в кВ/см. Формула справедлива для  $0,27 \leq S \leq 1$ . Численные эксперименты показали, что для большей части спектра капель при их сближении условие неустойчивости по Тейлору  $N_e \geq 1$ , начинает выполняться раньше, чем условие искрового пробоя. Однако для относительно крупных капель ( $R \geq 1$  мм) были зафиксированы случаи, когда при выполнении условия  $E_A > E_*$  параметр  $N_e$  удовлетворял условию  $N_e < 1$ . Так, например, для капель  $R_1 = R_2 = 1$  мм,  $q_2 = -q_1 = 0,4$  нКл при  $r = 1,75$  начинало выполняться условие  $E_A > E_*$  ( $E_* \approx 75$  кВ/см), тогда как при этом  $N_e \approx 0,70$ . Учитывая оценочный характер исследования и факт близости  $N_e$  к единице, можно предположить, что искровой пробой между каплями если и возможен, то весьма маловероятен по сравнению с развитием неустойчивости по Тейлору.

В заключение отметим, что в качественном аспекте описанные эффекты взаимодействия заряженных капель наблюдались в экспериментах [107, 111].